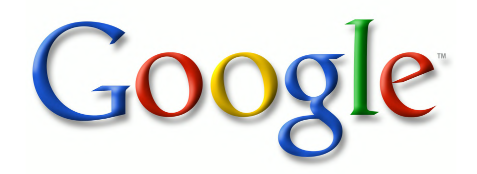
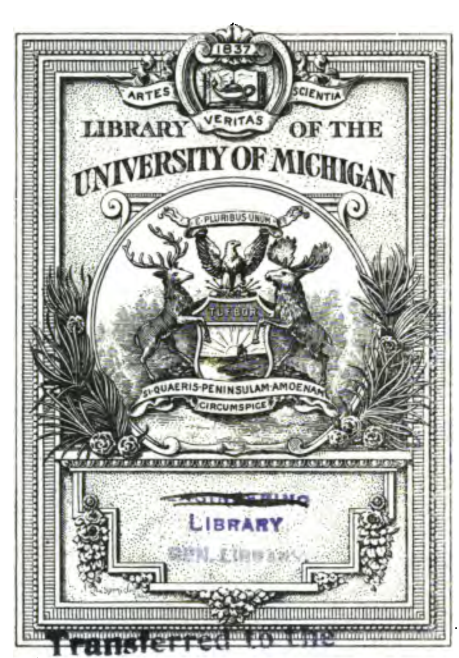





1837
ARTES
VERITAS
SCIENTIA
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
E PLURIBUS UNUM
TUEBOR
SI QUAERIS PENINSULAM AMOENAM
CIRCUMSPICE
LIBRARY

Vorträge

über

Mechanik

als Grundlage für das

Bau- und Maschinenwesen.

Von

Wilh. Keck,

Geh. Regierungsrath,

Professor an der Technischen Hochschule zu Hannover.

Erster Theil:

Mechanik starrer Körper.

Mit 389 Holzschnitten.



Hannover.

Helwing'sche Verlagsbuchhandlung.

1896.

Druck von Th. Schäfer, Hannover.

Vorwort.

Das vorliegende Buch enthält im Wesentlichen dasjenige, was als die erste Hälfte des Lehrfaches „Mechanik" im Winter des ersten Studienjahres an der Technischen Hochschule zu Hannover vorgetragen wird. Der Studienplan der Hochschule ist so eingerichtet, dass die Vorträge über Mechanik erst beginnen, nachdem die Studirenden etwa $2^1/_2$ Monate lang Differential- und Integralrechnung gehört haben. Auf Grund dieser Anordnung kann in den Vorträgen über Mechanik von den Grundbegriffen der Differential- und Integralrechnung Anwendung gemacht werden. Dieser Vorgang kommt nicht nur der Mechanik, sondern auch dem mathematischen Unterrichte zu statten, weil dessen Ergebnisse durch die Anwendungen, die sie in der Mechanik finden, geübt und befestigt werden.

Besonderes Gewicht wurde auf Einfachheit und Anschaulichkeit gelegt, sowie auf allmählichen Übergang vom Leichten zum Verwickelteren. Allen wichtigen Sätzen sind erläuternde Beispiele aus dem praktischen Leben und aus der Technik in kleinerem Drucke beigefügt.

Der vorliegende erste Theil der Vorträge über Mechanik behandelt die Mechanik des Punktes und der starren Körper. Die Mechanik der elastischen und der flüssigen Körper soll einen zweiten Theil, die allgemeine (analytische) Mechanik einen dritten Theil bilden, während eine eingehendere Elasticitätslehre vom Verfasser bereits 1892/93 herausgegeben wurde.

Bei der Abfassung des Buches ist auf Angabe der Quellen, auch der geschichtlichen, grösstentheils verzichtet worden; doch sei hervorgehoben, dass mir das Lehrbuch der technischen Mechanik von A. Ritter in Aachen, meinem hochverehrten Lehrer, in vielen

Beziehungen ein Vorbild gewesen ist. Diejenigen Stellen, an denen ich Ritters Werk unmittelbar benutzte, sind im Buche angegeben. Auch dem Lehrbuche der technischen Mechanik von Oscar Hoppe in Clausthal verdanke ich werthvolle Anregung.

Den Schluss des Buches bildet ein alphabetisches Verzeichnis der in den Formeln benutzten Buchstaben, sowie ein alphabetisches Inhaltsverzeichnis.

Hannover, im Januar 1896.

Keck.

Es wird gebeten, vor dem Gebrauche des Buches die am Schluss angegebenen Berichtigungen von Druckfehlern zu beachten.

Inhalt.

Zweite Abtheilung.

Mechanik starrer Körper.

A. Gleichgewicht starrer Körper.

Allgemeines.

Die Mechanik ist die Lehre von der Bewegung der Körper und von den Ursachen der Bewegung, den Kräften.

Während ein Körper sich bewegt, führt jeder Punkt desselben seine besondere Bewegung aus, und es wird die Bewegung des ganzen Körpers erst dann völlig bekannt sein, wenn man sie für jeden einzelnen seiner Punkte angeben kann.

Ein Punkt beschreibt bei seiner Bewegung eine ununterbrochene Bahnlinie, während zugleich eine gewisse Zeit verfliesst. Zur Kenntniss der Bewegung eines Punktes ist daher erforderlich, dass man die Form der Bahnlinie kennt und ausserdem anzugeben vermag, an welcher Stelle seiner Bahn der bewegliche Punkt sich in jedem Augenblicke befindet.

Soll die Bewegung eines Körpers aus ihren Ursachen hergeleitet werden, so muss man ausser der geometrischen Form und Grösse der Körper auch noch gewisse physikalische Eigenschaften derselben, zunächst ihre Stoffmenge, ihren Gehalt an träger Materie berücksichtigen, weil diese von wesentlichem Einfluss auf die Bewegung ist. Die Menge der trägen Materie wird kurz die Masse des Körpers genannt.

Je kleiner die räumliche Ausdehnung eines Körpers ist im Verhältnisse zur Längenerstreckung der Bahnlinien seiner einzelnen Punkte, desto näher werden diese einzelnen Bahnlinien an einander rücken, desto weniger werden sie sich also räumlich von einander unterscheiden. Betrachtet man z. B. die Bewegung einer geworfenen Kugel aus einiger Entfernung, so wird man in vielen Fällen nicht mehr die verschiedenen Bahnlinien der einzelnen Punkte getrennt auffassen, sondern man wird diese sämmtlichen Bahnlinien als zu einer einzigen (etwa der des Mittelpunktes) zusammengeschrumpft ansehen und nur von einer Bahnlinie der geworfenen Kugel sprechen. Dabei wird also die räumliche Ausdehnung der Kugel völlig vernachlässigt, sie wird hinsichtlich der geometrischen Untersuchung als zu einem Punkte verdichtet angesehen; jedoch denkt man sich diesen Punkt als behaftet mit der Masse des entsprechenden Körpers und bezeichnet ihn als einen Massenpunkt (materiellen Punkt).

Wenn man z. B. sagt, die Erde bewege sich in einer Ellipse um die Sonne, so fasst man damit unseren ganzen Planeten als einen einzigen Massenpunkt auf, indem man sich die ganze Masse der Erde in ihrem Mittelpunkte vereinigt denkt. Wir wissen freilich, dass, wegen der gleichzeitigen Drehung der Erde um ihre Achse, die einzelnen Punkte der Erde durchaus nicht sämmtlich Ellipsen, sondern verschiedene cykloidenartige Kurven beschreiben, aber dennoch ist die Auffassung der Erde als einfacher Massenpunkt bei solchen Untersuchungen zulässig, bei denen es auf die Verschiedenartigkeit der Bewegungen der einzelnen Punkte nicht ankommt, während dagegen bei anderen Untersuchungen gerade die verschiedene Lage der einzelnen Punkte der Erde von Wichtigkeit sein kann, so dass dann natürlich die räumliche Ausdehnung der Erde nicht vernachlässigt werden darf.

In Fällen dieser Art, wo die Form und Grösse eines Körpers nicht unberücksichtigt bleiben darf, betrachtet man ihn als aus Massenpunkten zusammengesetzt und bezeichnet ihn als eine Gruppe von Massenpunkten.

Ob man also in einem gegebenen Falle den sich bewegenden Körper als einfachen Massenpunkt, oder aber als eine Massengruppe zu behandeln hat, hängt nicht so sehr von der Grösse des Körpers, sondern vielmehr von der Art der vorliegenden Aufgabe ab. Uebrigens wird später gezeigt werden, dass die Ergebnisse der Untersuchungen, bei denen ein sich bewegender Körper als zu einem Punkte verdichtet angesehen wurde, nicht etwa ungenau, oder nur annähernd richtig sind, sondern für einen bestimmten Punkt des Körpers (den Schwerpunkt) vollständige Gültigkeit haben.

Es kann daher eine Untersuchung, bei welcher ein Körper als Massenpunkt angesehen wurde, jeder Zeit weiter ausgeführt und eingehender behandelt werden, indem man dazu übergeht, den betreffenden Körper nunmehr als eine Massengruppe aufzufassen. Es ist dann nur eine Vervollständigung, nicht aber eine Verbesserung oder Berichtigung der ersten einfacheren Untersuchung nöthig.

Wir werden uns nun zunächst mit der Bewegung eines einfachen Massenpunktes beschäftigen und erst später zu der Behandlung von Massengruppen übergehen.

Erste Abtheilung.

Mechanik des Massenpunktes.

Die Bewegung eines Massenpunktes heisst geradlinig oder krummlinig, je nachdem die Bahnlinie eine Gerade oder eine Kurve ist. Unter der „Richtung der Bewegung“ versteht man die Richtung der Bahnlinie an derjenigen Stelle, wo der Massenpunkt sich augenblicklich befindet. Bei der geradlinigen Bewegung ist also die Bewegungsrichtung dauernd dieselbe; bei der krummlinigen Bewegung ändert sie sich fortwährend.

I. Darstellung des Gesetzes der geradlinigen Bewegung eines Punktes.

Bewegt sich ein Massenpunkt auf einer Geraden, so kann der Ort P desselben in irgend einem Augenblicke durch seinen Abstand s von einem festen Punkte A der Bahnlinie AM (Fig. 1) angegeben werden. Die während der Bewegung verfliessende Zeit wird von irgend einem Zeitpunkte an nach Zeiteinheiten (etwa Sekunden) gezählt und mit t bezeichnet, während s in Längeneinheiten (etwa Metern) ausgedrückt wird. Ist nun zwischen den beiden veränderlichen Grössen s und t eine Beziehung bekannt, etwa

Fig. 1.

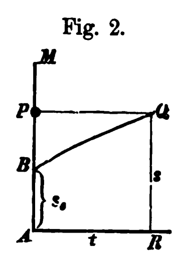
$$s = f(t),$$

so kann man für jeden Werth von t, d. h. für jeden Zeitpunkt, die zugehörige Grösse s und damit die Lage des Massenpunktes auf seiner Bahnlinie berechnen. Es wird daher die Gleichung $s = f(t)$ das Bewegungsgesetz der geradlinigen Bewegung des Massenpunktes genannt.

Ein solches Bewegungsgesetz wird am besten anschaulich gemacht durch eine bildliche Darstellung, indem man die Zeitgrössen t nach einem beliebig gewählten Maassstabe als Abscissen, die Längen s ebenso als Ordinaten aufträgt. Die Bahnlinie AM kann dann unmittelbar als Ordinatenachse benutzt werden. Die so erhaltene

Linie BQ (Fig. 2) nennen wir die **Wegeslängen-Kurve** (die man aber ja nicht als Bahnlinie auffassen darf). Aus Fig. 2 erkennt man, dass der Massenpunkt zu Anfang der Betrachtung, d. h. für $t = o$, schon in einem Abstand $AB = s_0$ von dem Festpunkte A sich befand, und dass dieser Abstand s sich mit wachsender Zeit vergrössert, dass der Massenpunkt sich also in der Richtung von A nach M bewegen wird. Nach $t = AR$ Zeiteinheiten ist $s = QR$; zieht man nun durch Q eine Parallele zur Zeitachse, so bestimmt diese den augenblicklichen Ort P auf der Bahnlinie AM.

Fig. 2.



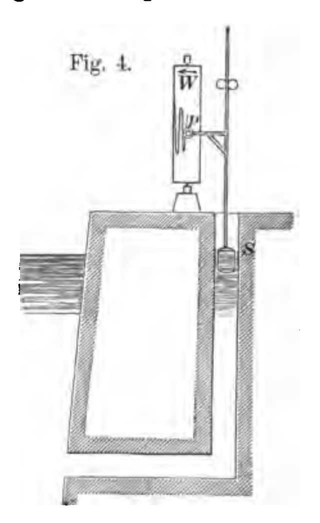
Beispiel: Das Bewegungsgesetz $s = 1 + {}^1/_4 t^2$ liefert für angenommene Werthe 0, 1, 2, . . . folgende zugehörige Werthe von s:

$t =$	0	1	2	3	4
$s =$	1	$1^1/_4$	2	$3^1/_4$	5.

Das Bewegungsgesetz lässt sich auch schreiben $t^2 = 2 \cdot 2\,(s - 1)$; dies ist die Gleichung einer Parabel mit lothrechter Achse und dem Scheitel B (Fig. 3.).

Fig. 3.

In manchen Fällen, wo das **Gesetz** einer Bewegung nicht bekannt ist, verschafft man sich dadurch eine möglichst genaue Kenntnis desselben, dass man den als Massenpunkt zu betrachtenden beweglichen Körper mit einem Schreibstifte versieht, der auf einer durch ein Uhrwerk gleichmässig gedrehten Papierwalze W die bildliche Darstellung des Bewegungsgesetzes selbstthätig aufzeichnet. So kann z. B. ein veränderlicher Wasserstand durch Schwimmer sich selbstthätig auftragen, indem ein mit dem Schwimmer S verbundener Schreibstift P die entsprechende Kurve (Fluthkurve) beschreibt (Fig. 4). Gewöhnlich ist der Wechsel der Wasserstandshöhe zur unmittelbaren Auftragung zu gross; alsdann ist die lothrechte Bewegung durch geeignetes Räderwerk in verkleinertem Maſsstabe (etwa 1 : 25) zur Darstellung zu bringen.



a) Gleichförmige Bewegung eines Punktes. Geschwindigkeit.

Der einfachste Fall eines Bewegungsgesetzes ist offenbar die geradlinige (lineare) Form

Fig. 5.

1) $$s = s_0 + ct$$

(mit s_0 und c als unveränderlichen Grössen), welche durch die Gerade BQ (Fig. 5) dargestellt wird. Für $t = AR$ ist $s = RQ = AP$. Giebt man t einen anderen, etwa grösseren Werth $t_1 = AR_1$, so wird

$$s_1 = s_0 + ct_1 = R_1 Q_1 = AP_1.$$

Durch Abziehen der ersten Gleichung von der letzten entsteht

$$s_1 - s = c(t_1 - t) \text{ oder } c = \frac{s_1 - s}{t_1 - t} = \frac{\text{zurückgelegter Weg}}{\text{entsprechende Zeit}}.$$

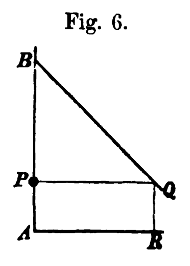
Die unveränderliche Grösse c der Gl. 1 ist also das Verhältnis der zurückgelegten Wegeslänge zu der Anzahl der dazu verbrauchten Zeiteinheiten. *Eine Bewegung, bei der dieses Verhältnis des Weges zur Zeit sich nicht ändert, bei der also in gleichen Zeiträumen stets gleiche Wegeslängen zurückgelegt werden, heisst eine gleichförmige.*

Wählt man den beliebigen Zeitraum $t_1 - t$ gleich der Zeiteinheit, so bedeutet $c = s_1 - s$ die in jeder Zeiteinheit zurückgelegte Wegeslänge, und *dieses Verhältnis: Weg durch Zeit, oder die in jeder Zeiteinheit zurückgelegte Wegeslänge heisst die Geschwindigkeit c der gleichförmigen Bewegung.*

In der Darstellung des Bewegungsgesetzes (Fig. 5) erscheint die Geschwindigkeit $c = \frac{s_1 - s}{t_1 - t} = \frac{Q_1 N}{Q N} = \operatorname{tg} \alpha$ als das Ansteigungsverhältnis der Wegeslängen-Kurve BQ.

Ist das Ansteigungsverhältnis der Geraden BQ *negativ* (Fig. 6), so erhalten wir das Gesetz $s = s_0 - ct$ mit negativer Geschwindigkeit c; es bedeutet dies eine rückläufige Bewegung von B nach dem Festpunkte A hin.

Fig. 6.

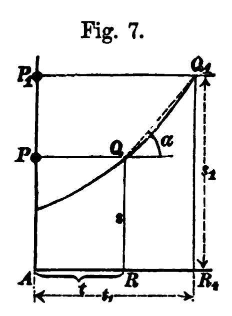


Ist BQ der Zeitachse parallel, d. h ist $\operatorname{tg} \alpha$ und damit die Geschwindigkeit $c = 0$, so bleibt s unverändert $= s_0$; der Massenpunkt ruht also.

b) Ungleichförmige Bewegung eines Punktes.

Hat das Bewegungsgesetz $s = f(t)$ nicht die einfach lineare Form, ist die Wegeslängen-Kurve also eine krumme Linie (Fig. 7), so ist das Verhältnis von $s_1 - s$ zu $t_1 - t$ veränderlich; man nennt dann die Bewegung eine ungleichförmige. Während des Zeitraumes $RR_1 = t_1 - t = \Delta t$ wird eine Wegeslänge $PP_1 = s_1 - s = \Delta s$ zurückgelegt. Stellt man sich nun vor, dass diese Strecke Δs, statt nach dem gegebenen Bewegungsgesetze, gleichförmig beschrieben würde, so wäre

Fig. 7.



1) $$\frac{s_1 - s}{t_1 - t} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = v_m$$

die Geschwindigkeit dieser gedachten gleichförmigen Bewegung; die Sehne QQ_1 gäbe die Darstellung des Gesetzes derselben, und das Ansteigungs-Verhältnis dieser Sehne das Mafs der Geschwindigkeit v_m. Die Geschwindigkeit v_m dieser gleichförmigen Bewegung, vermöge deren der sich bewegende Punkt in dem Zeitraume $t_1 - t$ dieselbe Wegeslänge $s_1 - s$ zurücklegen würde wie nach dem wirklichen Bewegungsgesetze, nennt man die **mittlere Geschwindigkeit** für den Zeitraum $t_1 - t$.

Die stellvertretende gleichförmige Bewegung, dargestellt durch die Sehne QQ_1, wird sich nun der gegebenen Bewegung, dargestellt durch die Kurve, in der Nähe des Zeitpunktes t um so mehr anschmiegen, also von ihr um so weniger abweichen, je kleiner man den Zeitraum $t_1 - t = \Delta t$ und mithin auch die Sehne $Q_1 Q$ wählt. Lässt man den Zeitraum Δt im Sinne der Differentialrechnung zu einem unendlich kleinen Zeittheilchen dt werden, so rückt auch der Kurvenpunkt Q_1 dem Punkt Q unendlich nahe, und aus der Sehne QQ_1 wird dann eine Berührungsgerade der Kurve im Punkte Q. Die für das unendlich kleine Zeittheilchen dt berechnete mittlere Geschwindigkeit

2) $$v = ds : dt$$

bezeichnet man als die Geschwindigkeit der gegebenen Bewegung im Zeitpunkte t. Sie erscheint als das Ansteigungs-Verhältnis der entsprechenden Berührungsgeraden der Wegslängen-Kurve oder (was dasselbe ist) als das Ansteigungs-Verhältnis der Wegeslängen-Kurve selbst. Man bestimmt

die Geschwindigkeit im Zeitpunkte t als die erste Abgeleitete oder den ersten Differential-Quotienten $v = \frac{ds}{dt} = f'(t)$ des gegebenen Bewegungs-Gesetzes $s = f(t)$.

Die Form $v = \frac{ds}{dt}$, in welcher bei ungleichförmiger Bewegung die Geschwindigkeit ausgedrückt wird, entspricht der Form $c = \frac{s_1 - s}{t_1 - t}$ bei der gleichförmigen Bewegung; man betrachtet aber nur ein unendlich kleines Theilchen der Bewegung und denkt sich dieses durch eine gleichförmige mit derselben Wegeslänge ds ersetzt.

Beispiel: Dem Bewegungsgesetze $s = 1 + {}^1/_4 t^2$ (S. 4) entspricht hiernach das Geschwindigkeits-Gesetz

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{1}{2} t.$$

Für $t = 0$ ist $v = 0$; mit fortlaufender Zeit nimmt die Geschwindigkeit v gleichmässig zu. Man ersieht auch aus Fig. 3, dass das Ansteigungs-Verhältnis der Kurve BQ bei B gleich Null ist und nach rechts fortwährend zunimmt.

Da die Geschwindigkeit die auf eine Zeiteinheit bezogene Wegeslänge bezeichnet, so müssen bei einer Geschwindigkeits-Zahl selbstverständlich auch die Längeneinheit und die Zeiteinheit bekannt sein, auf welche sich die Zahl bezieht. Rechnet man nach Metern und Sekunden, so schreibt man z. B. $v = 3\ {}^{\mathrm{m}}/_{\mathrm{s.}}$ wenn die sekundliche Geschwindigkeit 3 Meter beträgt, während $v = 10\ {}^{\mathrm{km}}/_{\mathrm{h.}}$ eine Geschwindigkeit von 10 Kilometern in einer Stunde (hora) bedeutet.

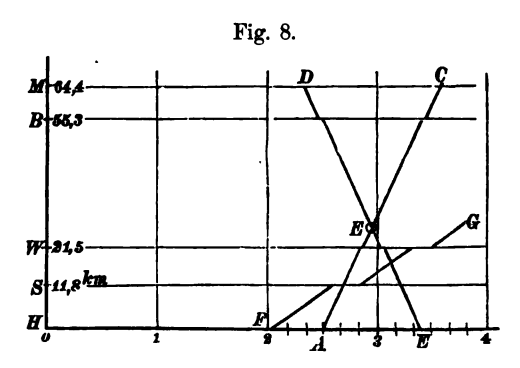
Kilometer, Meter, Centimeter und Millimeter werden durch km, m, cm und mm ohne Punkte bezeichnet, während Stunde, Minute und Sekunde durch h., m. und s. mit Punkten ausgedrückt werden soll.

Zuweilen kennt man von einer Bewegung nur die in einzelnen grösseren Zeiträumen zurückgelegten Wegeslängen, kann daraus dann die mittlere Geschwindigkeit für jeden dieser Zeiträume berechnen und betrachtet diese annäherungsweise als wahre Geschwindigkeiten, indem man jeden Bewegungstheil als einen gleichförmigen ansieht.

Beispiel 1: Letzteres findet Anwendung bei der zeichnerischen Darstellung der Fahrpläne der Eisenbahnzüge. Ein Eisenbahnzug ist freilich eine vielfältig zusammengesetzte Körpergruppe, deren einzelne Theile die verschiedenartigsten Bewegungen ausführen. Für den Zweck der Fahrpläne kommen aber diese verwickelten Verhältnisse nicht in Betracht. Vielmehr denkt man sich den

ganzen Zug zu einem Punkte zusammengedrängt, denkt sich die Mittellinie des Gleises geradlinig gestreckt und längs dieser Mittellinie den Punkt sich verschiebend. Als Wegeslängen trägt man die Strecken von Mitte zu Mitte der Stationen auf. Die Bewegungen von Station zu Station, welche in Wirklichkeit zum Theil ungleichförmige sind, betrachtet man annähernd als gleichförmig, indem man die Bewegungsgesetze nach mittleren Geschwindigkeiten durch gerade Linien darstellt. Auf der wagerechten Grundlinie (Fig. 8) sind die Zeiten, von Mitternacht beginnend, aufgetragen, und zwar bedeuten die kleinen Theile je 10 Minuten. Auf der lothrechten Achse sind die Strecken der Bahnlinie, nach Kilometern angegeben, abgetheilt, und z. B. mit *H* (Hannover), *S* (Seelze), *W* (Wunstorf), *B* (Bückeburg) und *M* (Minden) bezeichnet. Ein Nachtschnellzug, um 2 Uhr 30 Min. von Hannover abfahrend, trifft 2 Uhr 51 Min. in Wunstorf ein, fährt nach 1 Minute Aufenthalt weiter, ist 3 Uhr 24 Min. in Bückeburg, hat 1 Minute Aufenthalt und langt 3 Uhr 34 Min. in Minden an. Dieser Zug ist durch die gebrochene Linie *AC* dargestellt. Den Stations-Aufenthalt bezeichnet ein kurzer wagerechter Strich oder Absatz. Der Linienzug *DE* bezieht sich auf einen Gegenzug, der um 2 Uhr 18 Min. in Minden abfährt und 3 Uhr 10 Min. in Hannover eintrifft. Der Schnittpunkt *E* beider Linien kennzeichnet den Zeitpunkt und die Stelle (zwischen *B* und *W*), wo beide Züge an einander vorbeifahren. Da die Eisenbahn doppelgleisig ist, kann dies auf freier Strecke (zwischen 2 Bahnhöfen) geschehen, wogegen es bei eingleisigen Bahnen nur auf einer Station möglich wäre. Der Linienzug *FG* bezeichnet einen Güterzug, dessen erheblich geringere Geschwindigkeit aus der schwächeren Ansteigung hervorgeht. Dieser Güterzug hält längere Zeit in Seelze und wird hier von dem ohne Aufenthalt durchfahrenden Schnellzug überholt. Linien, die nach derselben Seite hin ansteigen, bezeichnen Züge in derselben Richtung, die auf demselben Gleise fahren, sich daher nur auf Stationen überholen können. Dieserhalb dürfen Linien, die nach derselben Seite ansteigen, sich nur auf Stationslinien durchschneiden. Solche Fahrpläne enthalten in Wirklichkeit sämmtliche Züge zu einem Bilde vereinigt und sind ein unentbehrliches Hülfsmittel des Betriebes, wenn es sich um Einlegung von Sonderzügen, um Ausführung von Gleisarbeiten u. dergl. handelt, weil man daraus klar erkennen kann, zu welchen Zeiten die Gleise für neue Züge oder für Arbeiten frei sind. In der wirklichen Ausführung liegt freilich die Zeitachse lothrecht, die Längenachse wagerecht, doch lediglich aus äusseren Zweckmässigkeits-Rücksichten, die mit dem Wesen der Sache nichts zu thun haben. Die 33,9 km zwischen

Fig. 8.



Wunstorf und Bückeburg werden in 32 Minuten zurückgelegt, d. h. mit einer mittleren Geschwindigkeit von 1,06 Kilometern in der Minute

$$= 1{,}06 \frac{\text{km}}{\text{m.}} = 60 \cdot 1{,}06 \frac{\text{km}}{60\ \text{m.}} = 63{,}6 \frac{\text{km}}{\text{h.}} \text{ oder}$$

$$1060 \frac{\text{m}}{60\ \text{s.}} = \frac{1060}{60} \frac{\text{m}}{\text{s.}} = 17{,}67 \frac{\text{m}}{\text{s.}}.$$

Eine sekundliche Geschwindigkeit von 20 m ist gleichbedeutend mit

$$20 \cdot \frac{3600\ \text{m}}{3600\ \text{s.}} = 72\,000 \frac{\text{m}}{\text{h.}} = 72 \frac{\text{km}}{\text{h.}},$$

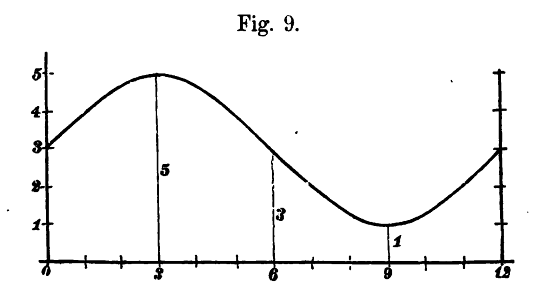
d. h. mit einer stündlichen Geschwindigkeit von 72 km, während

$$100 \frac{\text{km}}{\text{h.}} = \frac{100\,000}{3600} \frac{\text{m}}{\text{s.}} = 27{,}78 \frac{\text{m}}{\text{s.}}$$

bedeutet.

Beispiel 2: Die lothrechte Auf- und Abwärts-Bewegung eines der Ebbe und Fluth unterworfenen Wasserspiegels erfolge nach dem Bewegungsgesetze $s = 3 + 2 \sin {}^1/_6\, \pi t$, wobei die Zeiten t in Stunden (abgekürzt h.) die Wege s in Metern zu verstehen sind. Die Darstellung dieses Gesetzes (die Fluthkurve) hat dann die Form der Fig. 9. Für $t = 3$ Stunden erreicht $\sin {}^1/_6\, \pi t$ seinen grössten Werth $\sin {}^1/_2\, \pi = 1$, für $t = 9$ h. seinen kleinsten Werth $\sin {}^3/_2\, \pi = -1$, so dass s zwischen dem grössten Werthe 5 m und dem kleinsten Werthe 1 m schwankt. Das Geschwindigkeits-Gesetz ist

Fig. 9.



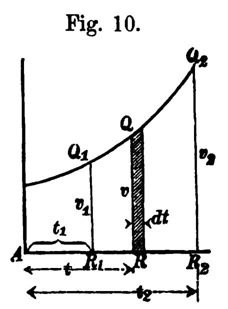
$v = {}^1/_3\, \pi \cos {}^1/_6\, \pi t = 1{,}047 \cdot \cos {}^1/_6\, \pi t$. Für $t = 0$, $t = 12$ und ganze Vielfache davon hat v seinen grössten Werth, nämlich $v_{max} = 1{,}047$ m/h. Für $t = 6$, $t = 18$, 30 u. s. w. hat v seinen grössten negativen oder seinen Minimalwerth, nämlich $v_{min} = -1{,}047$ m/h.. Die Geschwindigkeit v ist positiv, solange die Wegeslängenkurve nach rechts ansteigt, und umgekehrt; sie ist Null, wenn das Steigen in Fallen übergeht, und umgekehrt, d. h. an den höchsten und tiefsten Punkten der Kurve, nämlich für $t = 3$, 9, 15 u. s. w. — Fig. 9 stellt eine ideelle Fluthkurve dar. Die wahren Fluthkurven weichen davon zunächst grundsätzlich in der Weise ab, dass wegen der Bewegung des Mondes um die Erde die Zeit zwischen zwei höchsten Wasserständen nicht 12 Stunden, sondern mehr, nämlich 12 Stunden 25 Minuten beträgt. Ausserdem enthalten die wirklichen Fluthkurven Unregelmässigkeiten, die von der örtlichen Gestaltung der Flussbetten, des Meerbodens, der Ufer, den Windverhältnissen u. s. w. abhängen.

2. Darstellung des Geschwindigkeits-Gesetzes der geradlinigen Bewegung eines Punktes.

Wie s eine $f(t)$ war, so ist die Abgeleitete davon, nämlich v, ebenfalls eine $\varphi(t) = f'(t)$, welche das Geschwindigkeits-Gesetz heissen möge und ebenfalls zeichnerisch dargestellt werden kann.

Während man aus der Darstellung des Bewegungsgesetzes die in einem beliebigen Zeitraume zurückgelegte Wegeslänge unmittelbar abgreifen konnte, ist dies aus dem Geschwindigkeits-Gesetze nicht ohne Weiteres möglich. Da aber die Geschwindigkeit v aus dem Bewegungsgesetze $s = f(t)$ durch Differentiation $v = ds : dt$ zu finden war, so muss man durch das umgekehrte Verfahren, d. h. durch Integration, auch von v zu s gelangen können. Es ist nämlich $ds = v\,dt$, folglich mittels sog. unbestimmter Integration

Fig. 10.



$$s = \int v\,dt + C.$$

Die im Allgemeinen unbestimmte Integrations-Konstante C ist festzustellen, wenn zu einem bestimmten Werthe von t der zugehörige Werth von s bekannt ist, etwa für den Anfang der Beobachtung $t = 0$ der Werth $s = s_0$.

Beispiel: Für die Bewegung eines Massenpunktes sei das Geschwindigkeitsgesetz $v = 3\,t^2$ gegeben; der Massenpunkt habe zu Anfang schon eine Entfernung $s_0 = 3$ m von dem gewählten Festpunkte der Bahnlinie. Dann ist

$$s = \int 3\,t^2\,dt + C = t^3 + C.$$

Die Grösse C ist nun an die Bedingung gebunden, dass die Gleichung für $t = 0$ den Werth $s = 3$ liefern muss. Setzt man demnach diese beiden Grössen in die Gleichung ein, also $3 = 0 + C$, so bestimmt sich $C = 3$, und das Bewegungsgesetz lautet

$$s = 3 + t^3.$$

(Als Probe erhält man hieraus wieder $v = ds : dt = 3\,t^2$.)

Die Gleichung $ds = v\,dt$ hat übrigens auch eine geometrische Bedeutung, indem $v\,dt$ den Inhalt des unmittelbar rechts neben $v = RQ$ (Fig. 10) liegenden lothrechten Flächenstreifens der Geschwindigkeitskurve darstellt (mit Vernachlässigung einer unendlich kleinen Grösse höherer Ordnung). Daher muss die endliche Wegeslänge $s_2 - s_1$, die zwischen den Zeitpunkten $t = t_1$ und $t = t_2$ zurückgelegt wird, durch die Summe aller zwischenliegenden Flächen-

streifen, d. h. durch die endliche Fläche $Q_1 Q_2 R_2 R_1$ ausgedrückt sein. Oder: die während einer gewissen Zeit, d. h. zwischen zwei gegebenen Zeitpunkten, zurückgelegte Wegeslänge wird dargestellt durch den Inhalt derjenigen Fläche, welche von der Geschwindigkeitskurve, der Zeitachse und den, jenen beiden Zeitpunkten entsprechenden Geschwindigkeits-Ordinaten eingeschlossen ist.

Analytisch bedeutet dies $s_2 - s_1 = \int_{t=t_1}^{t=t_2} v\,dt$, also das bestimmte Integral der Gleichung $ds = v\,dt$, zwischen den Zeitgrenzen t_1 und t_2 genommen.

Lässt man den auf der Bahnlinie (Fig. 2) zu wählenden Festpunkt mit der Anfangslage des beweglichen Punktes zusammenfallen, d. h. $s_0 = 0$ werden, so ergiebt sich für die Wegeslänge von $t = 0$ bis $t = t$ (indem man $s_1 = s_0 = 0$, $t_1 = 0$ setzt und statt t_2 und s_2 einfach t und s schreibt): $s = \int_{t=0}^{t=t} v\,dt$. (1

a) Gleichförmig veränderte Bewegung. Beschleunigung.

Der einfachste Fall einer ungleichförmigen (mit veränderlicher Geschwindigkeit erfolgenden) Bewegung ist offenbar ein solcher, wobei die ganze Geschwindigkeitsänderung während eines bestimmten Zeitraumes t sich gleichmässig über letzteren vertheilt. Ist also c die Anfangsgeschwindigkeit, v die Geschwindigkeit nach t Zeiteinheiten, so beträgt die ganze Geschwindigkeitsänderung $v - c$ während des Zeitraums t. Soll diese Aenderung sich gleichmässig über die Zeit t erstrecken, so muss sie für jede Zeiteinheit $(v - c) : t$ betragen. Setzt man diese gleichbleibende Geschwindigkeitsänderung für jede Zeiteinheit $= p$, so wird $v - c = pt$ oder

$$v = c + pt. \qquad (2$$

Eine solche Bewegung, bei welcher die Aenderung der Geschwindigkeit verhältnisgleich mit der entsprechenden Zeit erfolgt, heisst eine gleichförmig veränderte Bewegung, und Gl. 2 ist ihr Geschwindigkeitsgesetz.

Ist die in jeder Zeiteinheit erfolgende Geschwindigkeits-Aenderung p positiv, d. h. eine Zunahme, so heisst sie **Beschleunigung** und die Bewegung wird eine gleichförmig beschleunigte



genannt. Im entgegengesetzten Falle hat der Massenpunkt eine *gleichförmig verzögerte* Bewegung, und die dann negativ werdende Geschwindigkeits-Aenderung in der Zeiteinheit heisst **Verzögerung**; das entsprechende Geschwindigkeitsgesetz ist

3) $$v = c - p\,t.$$

Offenbar kann eine Verzögerung einfach wie eine negative Beschleunigung behandelt werden.

Das Geschwindigkeitsgesetz $v = c + p\,t$, in welchem v und t veränderlich, c und p unveränderlich sind, wird durch eine ansteigende Grade BQ (Fig. 11) dargestellt. Die Beschleunigung

$$p = \frac{v - c}{t} = \frac{NQ}{BN} = \operatorname{tg} \alpha$$

erscheint dabei als das Ansteigungsverhältnis der Geschwindigkeitslinie BQ.

Fig. 11.

Die zufolge einer gleichförmig beschleunigten Bewegung während des Zeitraums $t = AR$ zurückgelegte Wegeslänge s ist (nach dem allgemeinen Satze auf S. 11) gleich der Flächenzahl der Figur $ARQB$, d. h.

4) $$s = {}^1\!/_2\,(v + c)\,t.$$

Soll s aber durch c, p und t ausgedrückt werden, so zerlege man das Trapez in das Rechteck $ABNR = c\,t$ und das Dreieck $BNQ = {}^1\!/_2\,t \cdot NQ = {}^1\!/_2\,t\,p\,t = {}^1\!/_2\,p\,t^2$, so dass

5) $$s = c\,t + {}^1\!/_2\,p\,t^2$$

entsteht. Das Rechteck zeigt hierbei den Einfluss der Anfangsgeschwindigkeit, das Dreieck ${}^1\!/_2\,p\,t^2$ dagegen den Einfluss der Beschleunigung auf die Wegeslänge. Will man endlich noch s durch c, v und p ausdrücken, so ersetze man in Gl. 3 die Grösse t durch $\frac{v - c}{p}$, um zu erhalten

6) $$s = \frac{v + c}{2}\,\frac{v - c}{p} = \frac{v^2 - c^2}{2\,p}.$$

Für die gleichförmig verzögerte Bewegung, bei der $c > v$, gelten die Gleichungen 4, 5 und 6 ebenfalls, sobald darin $+p$ mit $-p$ vertauscht wird.

Legt man Meter und Sekunden zu Grunde, so kann eine Geschwindigkeit geschrieben werden: $v\ {}^{\mathrm{m}}\!/_{\mathrm{s}}$. Die Beschleunigung ist

aber eine Geschwindigkeitszunahme, getheilt durch eine Zeit, oder die auf die Zeiteinheit bezogene Geschwindigkeitszunahme, ist daher zu schreiben $p\ ^{m}/_{s.^2}$ und zu sprechen: p Meter in der Quadratsekunde. (Vorschlag von A. Hasselblatt, Petersburg.)

Beispiel: Ein Eisenbahnzug setzt sich vom Bahnhofe aus in Bewegung und habe, nachdem 180 Sekunden seit der Abfahrt verstrichen sind, seine volle Geschwindigkeit von $25\,\frac{m}{s.}$ erreicht; es soll unter der Annahme, dass die Bewegung eine gleichfömig beschleunigte sei, die Grösse der Beschleunigung, sowie die während der Anfahrt (d. h. der 180 Sek.) zurückgelegte Wegeslänge berechnet werden.

Fig. 12.

Die Darstellung des Geschwindigkeitsgesetzes (Fig. 12) ist in diesem Falle, wo die Anfangsgeschwindigkeit = 0, ein Dreieck. Die Beschleunigung ist das Ansteigungsverhältnis der Geraden AQ, mithin

$$p = \frac{25}{180} = \frac{1}{7{,}2} = 0{,}14\,\frac{m}{s.^2},$$

oder es wächst die Geschwindigkeit in jeder Sekunde um $0{,}14\,\frac{m}{s.}$.

In $\frac{km}{h.^2}$, d. h. in Kilometern für die Quadratstunde, ausgedrückt, wird

$$p = \frac{1}{7{,}2}\,\frac{3600 \cdot 3600\ ^m}{(3600\ ^{s.})^2} = 1\,800\,000\,\frac{m}{h.^2} = 1800\,\frac{km}{h.^2},$$

wovon man sich auch leicht überzeugt, wenn man die Aufgabe mit

$$v = 90\,\frac{km}{h.}\ \text{und}\ t = 180\ ^{s.} = \frac{1}{20}\ ^{h.}\ \text{durchfährt.}$$

Die Wegeslänge während der Anfahrt wird gemessen durch den Inhalt des Dreiecks AQR, d. h. es ist

$$s = \frac{180 \cdot 25}{2} = 2250\ ^m.$$

Wenn der Zug auf freier Strecke die soeben erlangte Geschwindigkeit unverändert beibehält, so ist die Darstellung des Geschwindigkeitsgesetzes dieser nun gleichförmigen Bewegung eine durch den Punkt Q gezogene Wagerechte.

Soll der Zug nun auf der nächsten Haltestelle zum Stillstande kommen, so muss er durch geeignete Mittel (Widerstände, Bremsen, unter Abstellung des Dampfes der Lokomotive) verzögert werden. Es seien diese Mittel so beschaffen, dass sie dem Zuge eine gleichbleibende Verzögerung von $0{,}4\,\frac{m}{s^2}$ ertheilen; wie lange wird diese gleichförmig verzögerte Bewegung bis zum Stillstande währen, und wie gross wird ihre Wegeslänge sein, d. h. in welcher Entfernung vor der Haltestelle muss sie beginnen (müssen die Bremsen angezogen werden)?

Fig. 12a.

Die Darstellung des Geschwindigkeitsgesetzes sei $Q_1 B$ (Fig. 12a). Da die Geschwindigkeit von $25\,\frac{m}{s.}$ während jeder Sekunde um $0{,}4\,\frac{m}{s.}$ sich vermindert, so sind $25 : 0{,}4 = 62{,}5\ ^{s.} = R_1 B$ zur

völligen Aufzehrung der Geschwindigkeit erforderlich. Die Wegeslänge in diesen $62{,}5$ s. beträgt nach der Figur $\frac{1}{2} \cdot 25 \cdot 62{,}5 = 781{,}25$ m; d. h. etwa 781 m vor der Haltestelle muss die Verzögerung beginnen.

Die Wegeslängen der gleichförmig beschleunigten und verzögerten Bewegungen würden bei gleichbleibender Geschwindigkeit von 25 m/s. je in der Hälfte der Zeit zurückgelegt sein. Durch Anhalten und Wiederanfahren gehen daher, im Vergleiche zum einfachen Durchfahren, $90 + 31{,}25 = 121{,}25$ s. oder rund 2 Minuten verloren. Mit Einschluss von einer Minute Aufenthalt kostet also jeder Haltepunkt einem Schnellzuge 3 Minuten Mehraufwand an Zeit.

Die Annahme, dass die Anfahrt und das Anhalten gleichförmig veränderte Bewegungen seien, ist eine vereinfachende Voraussetzung; das wahre Geschwindigkeitsgesetz wird sich nicht durch gerade Linien darstellen, ist vielmehr schwieriger zu ermitteln und hängt von vielen Umständen ab, die hier nicht berücksichtigt werden können.

Beispiel: Ein Gewehrgeschoss verlasse den $0{,}8$ m langen Gewehrlauf mit einer sekundlichen Geschwindigkeit von 400 m. Wenn man nun die im Augenblicke des Abfeuerns mit der Geschwindigkeit Null beginnende, beschleunigte Bewegung des Geschosses im Rohre wieder annähernd als gleichförmig beschleunigt betrachtet, wie lange dauert sodann die Bewegung im Rohre und wie gross ist die Beschleunigung?

Die Geschwindigkeitsfigur ist wiederum ein Dreieck, dessen Inhalt $= 0{,}8$ (Wegeslänge) sein muss. Nennt man die Zeit t, so ist $\frac{400}{2} t = 0{,}8$, d. h.

$$t = \frac{0{,}8}{200} = \frac{4}{1000} = \frac{1}{250} \text{ s.}$$

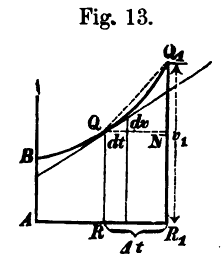
In dieser geringen Zeit wächst die sekundliche Geschwindigkeit von Null auf 400 m, in der Sekunde also um $400 : \frac{1}{250} = 400 \cdot 250 = 100\,000 \frac{\text{m}}{\text{s.}}$; die Beschleunigung beträgt also $100\,000 \frac{\text{m}}{\text{s.}^2}$. Diese überraschend grosse Zahl ist so zu verstehen, dass, wenn die gleichförmig beschleunigte Bewegung unter Einwirkung der Pulvergase 1 Sekunde lang in unveränderter Weise fortdauerte, eine Geschwindigkeit von $100\,000 \frac{\text{m}}{\text{s.}}$ entstehen würde. Die beschleunigte Bewegung in dem Rohre währt aber nur $\frac{1}{250}$ s. und bringt daher nur $400 \frac{\text{m}}{\text{s.}}$ Geschwindigkeit hervor.

b) Ungleichförmig veränderte Bewegung.

Aendert sich die Geschwindigkeit einer Bewegung nicht verhältnismässig mit der Zeit, so heisst die Bewegung eine ungleichförmig veränderte; das Geschwindigkeitsgesetz ist dann nicht mehr einfach geradlinig, sondern von der allgemeinen Form $v = \varphi(t)$, oder die Geschwindigkeitslinie ist irgend eine Kurve.

In derselben Weise nun, wie auf S. 6 der Begriff der Geschwindigkeit, ausgehend von der gleichförmigen Bewegung, durch Verallgemeinerung auf beliebige Bewegungen ausgedehnt wurde, findet auch hinsichtlich der Beschleunigung der geradlinigen Bewegung eine allgemeinere Fassung des Begriffes statt. Ist BQQ_1 (Fig. 13) die Geschwindigkeitslinie, so erfolgt in dem Zeitraume $RR_1 = \Delta t$ eine Geschwindigkeitszunahme $NQ_1 = \Delta v$. Zieht man nun die Sehne QQ_1, so ist diese die Geschwindigkeitslinie einer gleichförmig beschleunigten Bewegung, vermöge welcher die Geschwindigkeit in dem Zeitraume Δt von v auf $v + \Delta v$, also um die gleiche Grösse, wächst wie

Fig. 13.



bei der gegebenen Bewegung. $p_m = \frac{\Delta v}{\Delta t}$ ist dann die mittlere Beschleunigung für diesen bestimmten Zeitraum RR_1. Wenn der beliebige Zeitraum Δt zur Grenze Null herabsinkt, nähert sich diese mittlere Beschleunigung p_m einem bestimmten Grenzwerth p, und diesen Grenzwerth $p = \lim \frac{\Delta v}{\Delta t}$ oder

$$1) \qquad \boldsymbol{p = \frac{dv}{dt}}$$

nennt man die **Beschleunigung** zu Zeit t. Die Beschleunigung p ist die Abgeleitete der Geschwindigkeit v nach der Zeit t, oder die zweite Abgeleitete der Wegeslänge s nach der Zeit t.

$$2) \qquad v = \varphi(t) = \frac{ds}{dt} = f'(t); \; p = \frac{dv}{dt} = \varphi'(t) = \frac{d^2 s}{dt^2} = f''(t).$$

Die Beschleunigung erscheint wegen $p = dv : dt$ als das Ansteigungsverhältnis der Geschwindigkeitslinie, ebenso wie die Geschwindigkeit das Ansteigungsverhältnis der Wegeslängenkurve (S. 6) war.

Beispiel: Zu dem Bewegungsgesetze $s = 3 + 2 \sin {}^1/_6 \pi t$ (S. 9) gehörte das Geschwindigkeitsgesetz $v = {}^1/_3 \pi \cos {}^1/_6 \pi t = 1{,}047 \cos {}^1/_6 \pi t$. Hieraus ergiebt sich die veränderliche Beschleunigung

$$p = -\frac{1}{18} \pi^2 \sin \frac{1}{6} \pi t = -0{,}548 \sin \frac{1}{6} \pi t.$$

Indem man $p = dv : dt$ oder $dv = p\,dt$ schreibt, betrachtet man die Geschwindigkeitsänderung dv als verhältnisgleich mit der Zeit dt, betrachtet also ein Theilchen der beliebigen Bewegung als gleichförmig verändert. Für einen endlichen Zeitraum $t_1 - t$ ist dann die Geschwindigkeitszunahme

$$3)\qquad v_1 - v = \int_t^{t_1} p\,dt = \text{Fläche } RQQ_1R_1 \text{ der Fig. 13;}$$

oder man kann auch die Geschwindigkeit v im Zeitpunkte t in Form eines unbestimmten Integrals

$$4)\qquad v = \int p\,dt + C$$

schreiben, worin der Werth C bestimmt werden kann, wenn für irgend einen Zeitpunkt die Geschwindigkeit bekannt ist.

Beispiel 1: Das gegebene Bewegungsgesetz sei (auf Meter und Sekunden bezogen)

$$s = 2 + 6t - 2t^2 + \tfrac{1}{3}t^3;$$

dann ergiebt sich die Geschwindigkeit

$$v = ds : dt = 6 - 4t + t^2,$$

die Beschleunigung $\quad p = dv : dt = -4 + 2t.$

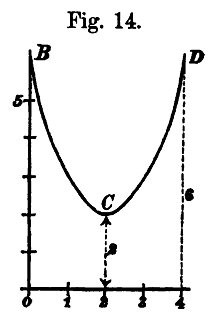
Man erkennt, dass hier eine ungleichförmig veränderte Bewegung vorliegt, da p mit der Zeit t veränderlich. Zu Anfang, d. h. für $t = 0$ ist $p = -4\,\frac{\text{m}}{\text{s.}^2}$, die Bewegung also eine verzögerte; die Geschwindigkeit, welche zu Anfang $6\,\frac{\text{m}}{\text{s.}}$ betrug, nimmt also zunächst ab. Es ist aber $p \lesseqgtr 0$ für $t \lesseqgtr 2^{\text{s.}}$. Die Geschwindigkeits-Abnahme hört also auf nach 2 Sekunden, und es beginnt dann eine beschleunigte Bewegung, und zwar wächst nun auch die Beschleunigung verhältnisgleich mit der Zeit. Der Zeitpunkt $t = 2^{\text{s.}}$, wo die Geschwindigkeit aufhört abzunehmen und zu wachsen beginnt, giebt für v einen Kleinstwerth $v_{min} = 2\,\frac{\text{m}}{\text{s.}}$. Die Geschwindigkeitslinie ist eine Parabel mit lothrecht aufwärts gerichteter Achse; der Scheitel entspricht dem Zeitwerthe $t = 2$ Sekunden. Die während der ersten 4 Sekunden zurückgelegte Wegeslänge $s - s_0$ ist leicht als die unterhalb der Parabel BCD (Fig. 14) befindliche Fläche zu berechnen. Da man weiss, dass die Parabelfläche $BCD = \frac{2}{3}$ des umschriebenen Rechtecks ist, so wird

$$s - s_0 = 6 \cdot 4 - \tfrac{2}{3}(6 - 2)\,4 = 13\tfrac{1}{3}^{\text{m}}.$$

Zur Prüfung liefert das Bewegungsgesetz

für $t = 4^{\text{s.}}$ $\quad s = 15\tfrac{1}{3}$,
für $t = 0$ $\quad s_0 = 2\quad$, mithin $s - s_0 = 13\tfrac{1}{3}^{\text{m}}$.

Fig. 14.



Beispiel 2: Eine geradlinige Bewegung erfolge mit der Beschleunigung $p = 2 + 3t^2$, und es sei für $t = 0$: $v = c = 1\frac{\text{m}}{\text{s.}}$, $s_0 = 0$. Dann wird aus

$$dv = (2 + 3t^2)\, dt$$

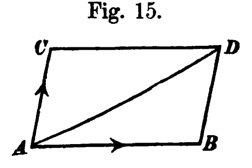
$$v - 1 = \int_0^t (2 + 3t^2)\, dt = 2t + t^3 \quad \text{oder} \quad v = 1 + 2t + t^3 \quad \text{und}$$

$$s = \int_0^t (1 + 2t + t^3)\, dt = t + t^2 + {}^1/_4 t^4.$$

3. Zusammensetzung mehrerer gleichzeitigen Bewegungen eines Punktes.

Ein Massenpunkt durchlaufe während der Zeit t die Bahnlinie AB (Fig. 15), und zwar in der Richtung von A nach B; diese Bahnlinie gehöre aber einem Körper an, welcher sich derartig parallel verschiebt, dass der Punkt A der Linie AB während der Zeit t die Bewegung AC ausführt und die ganze Bahnlinie AB in die parallele Lage CD kommt. Dann wird der Massenpunkt in Folge der beiden gleichzeitigen Bewegungen aus der Anfangslage A in irgend einer Bahnlinie nach D gelangen, und man nennt diese wahre Bewegung AD die Mittelbewegung oder Resultirende aus den beiden Seitenbewegungen AB und AC.

Fig. 15.



Anstatt diese wahre Bewegung AD als das Ergebnis der Bewegungen AB und AC zu bezeichnen, sagt man auch wohl kürzer, der Massenpunkt führe zwei gleichzeitige Seitenbewegungen aus, womit aber stets nur der beschriebene Vorgang gemeint sein soll. Da die Figur $ABDC$ ein Parallelogramm ist, so ergiebt sich ohne Weiteres der **Satz vom Parallelogramm der Bewegungen:**

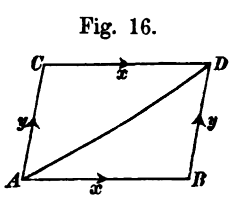
Führt ein Massenpunkt gleichzeitig zwei Seitenbewegungen aus, so ist der dem Anfangspunkt A gegenüberliegende Endpunkt des aus den beiden Seitenbewegungen gezeichneten Parallelogramms der wahre Ort des Punktes.

Man denke sich, auf dem Stabe AB ein Sonnenkäferchen entlang laufend, während man den Stab parallel nach CD verschiebt; dann gelangt das Sonnenkäferchen in Wirklichkeit von A nach D.

Eine Gerade AB von bestimmter Richtung, bestimmter Grösse und einem Pfeile, der einen bestimmten Bewegungssinn angiebt,

nennt man eine Strecke. AB sei die Strecke x, AC die Strecke y. Zur Bestimmung des Punktes D ist offenbar nicht die Zeichnung des ganzen Parallelogrammes erforderlich; vielmehr genügt es, an den Endpunkt B der Strecke x die parallel verschobene Strecke $BD = y$ anzutragen (Fig. 16). Beide bilden dann einen sog. „Streckenzug", und man kann sagen: Der wahre Ort D des Punktes ist der Endpunkt des aus den beiden Seitenbewegungen gebildeten Streckenzuges. Die Reihenfolge der Zusammensetzung ist offenbar gleichgültig. Der Streckenzug $AC = y$ und $CD = x$ führt zu demselben Endpunkte D.

Fig. 16.



Sind die Gesetze der beiden Seitenbewegungen bekannt, sodass man für jeden Zeitpunkt t die Strecken x und y berechnen kann, so ist auch der Ort des beweglichen Punktes für jeden Zeitwerth t bekannt und damit auch die Bahnlinie der Mittelbewegung AD völlig bestimmt.

Fig. 17.

Beispiel: Die eine Seitenbewegung folge dem Gesetze $x = t$ (in Metern und Sekunden), sei also gleichförmig, die andere dem Gesetze

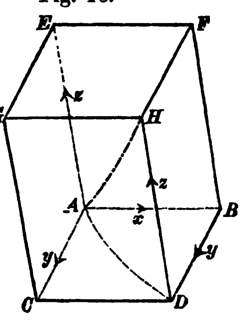
$$y = {}^1/_2\, t + {}^1/_{10}\, t^2$$

(also gleichförmig beschleunigt). Dann ist für

$t = 0$	1	2	3	4	5
$x = 0$	1	2	3	4	5
$y = 0$	0,6	1,4	2,4	3,6	5

Die Gleichung der Bahnlinie findet man, indem man $t = x$ in die Gleichung für y einsetzt, $y = {}^1/_2\, x + {}^1/_{10}\, x^2$. Dies bedeutet eine Parabel als Bahnlinie des Punktes.

Fig. 18.



Erleidet, während die Seitenbewegungen AB und AC erfolgen, die ganze Ebene derselben eine Parallelverschiebung z in der Richtung von A nach E (Fig. 18), so wird der Massenpunkt, der in Folge der beiden Bewegungen x und y nach D gelangen würde, sich nunmehr nach H bewegen, und es folgt der Satz vom Parallelepiped der Bewegungen:

Hat ein Massenpunkt drei gleichzeitige Seitenbewegungen, so ist der dem Anfangspunkte A gegenüber-

liegende Endpunkt H des aus den drei Seitenbewegungen bestimmten Parallelepipeds oder der Endpunkt des aus den Seitenbewegungen x, y und z gebildeten Streckenzuges $ABDH$ der wahre Ort des Punktes.

Als Beispiel könnten die Bewegungsgesetze: $x = t$; $y = {}^1\!/_2 t + {}^1\!/_{10} t^2$; $z = 3t$ benutzt werden.

Im Allgemeinen ist die wahre Bahnlinie eine räumliche Kurve.

a) Zusammensetzung der Geschwindigkeiten.

1) Ein Massenpunkt habe zwei gleichförmige, geradlinige Seitenbewegungen mit den Geschwindigkeiten w bezw. u; dann sind die Wegeslängen nach t Zeiteinheiten (Fig. 19)

Fig. 19.

$$AB = x = wt \text{ und } AC = y = ut;$$

innerhalb eines anderen, etwa kleineren Zeitraumes t_1:

$$AB_1 = x_1 = wt_1 \text{ und}$$
$$AC_1 = y_1 = ut_1.$$

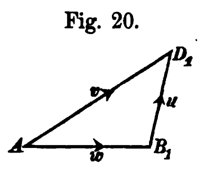
Der wahre Ort nach t bezw. t_1 Zeiteinheiten ergiebt sich durch den Streckenzug ABD bezw. AB_1D_1 zu D bezw. D_1. Es findet aber statt:

$$\frac{AB}{AB_1} = \frac{t}{t_1}; \quad \frac{BD}{B_1D_1} = \frac{t}{t_1}, \text{ also } \frac{AB}{AB_1} = \frac{BD}{B_1D_1},$$

mithin sind die Dreiecke ABD und AB_1D_1 ähnlich, sodass A, D_1 und D auf derselben Geraden liegen müssen. Da dies für alle Werthe von t und t_1 gilt, so muss die wahre oder Mittelbewegung geradlinig erfolgen. Zugleich ist aber auch wegen der Ähnlichkeit $\frac{AD}{AD_1} = \frac{AB}{AB_1} = \frac{t}{t_1}$, oder die Wegeslängen AD und AD_1 sind den entsprechenden Zeiten t und t_1 verhältnisgleich. Die Mittelbewegung aus zwei geradlinigen und gleichförmigen Seitenbewegungen ist hiernach ebenfalls geradlinig und gleichförmig. Ihre Geschwindigkeit v erhält man, indem man den willkürlichen Zeitraum t_1 zur Zeiteinheit werden lässt. Dann wird $AB_1 = w$; $B_1D_1 = u$ und $AD_1 = v$, oder die Geschwindigkeit v der wahren oder Mittelbewegung erscheint als die Schlussseite eines aus den

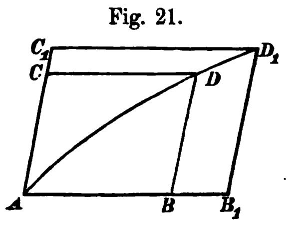
Geschwindigkeiten der Seitenbewegungen gebildeten Streckenzuges (Fig. 20). Der Pfeil der Schlussseite eines Streckenzuges wird stets von dem Anfange nach dem Ende des Streckenzuges verstanden, wie es sich hier bezüglich der Geschwindigkeit v als nothwendig ergiebt. Die in dieser Weise verstandene Schlussstrecke eines Streckenzuges heisst auch die **geometrische Summe** der Einzelstrecken.

Fig. 20.



2) Sind die beiden Seitenbewegungen **nicht gleichförmig**, erfolgen sie vielmehr nach beliebigen Bewegungsgesetzen $AB = x = f(t)$ und $AC = y = \varphi(t)$ (Fig. 21), so ändern sich AB und AC im Allgemeinen **nicht** verhältnisgleich; es wird daher die Mittelbewegung krummlinig ausfallen. Gleichwohl lässt sich für jeden Zeitpunkt t der wahre Ort des Massenpunktes aus den Seitenbewegungen x und y konstruiren. Aendert sich t in dt, so werden in diesem Zeittheilchen die Seitenbewegungen $BB_1 = dx$, $CC_1 = dy$ zurückgelegt, und der Massenpunkt gelangt von D nach D_1. Nun sind aber die Geschwindigkeiten der beiden Seitenbewegungen im Zeitpunkte t: $w = \frac{dx}{dt}$ bezw. $u = \frac{dy}{dt}$. Setzt man hiernach $dx = w\,dt$ und $dy = u\,dt$, so betrachtet man für die Dauer eines Zeittheilchens dt die Seitenbewegungen als gleichförmig, sodass für die augenblickliche Geschwindigkeit v der wahren oder Mittelbewegung die für gleichförmige Bewegungen abgeleitete Fig. 20 gültig bleibt. **Die Richtung der Geschwindigkeit v fällt hiernach** mit der Sehne DD_1, also, da diese unendlich klein, mit der Richtung der Bahnlinie, d. h. **mit der Bewegungsrichtung** zusammen. Auch ist, wie bei der geradlinigen Bewegung $v = \frac{DD_1}{dt} = \frac{ds}{dt}$. Die Geschwindigkeiten w und u der Seitenbewegungen nennt man kürzer die **Seitengeschwindigkeiten** des Massenpunktes, v die wahre oder **Mittelgeschwindigkeit**. Es gilt also für zwei beliebige geradlinige Seitenbewegungen der Satz vom Parallelogramm oder vom Dreieck der Geschwindigkeiten: **Die Mittelgeschwindigkeit ist die**

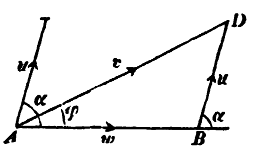
Fig. 21.



Diagonale eines Parallelogrammes aus den Seitengeschwindigkeiten, oder die geometrische Summe der Seitengeschwindigkeiten.

Hiernach kann die Mittelgeschwindigkeit, die wahre oder resultirende Geschwindigkeit durch Zeichnung gefunden werden; will man aber ihre Grösse und Richtung durch Rechnung bestimmen, so bedenke man, dass in dem Dreiecke ABD (Fig. 22)

Fig. 22.



$v^2 = w^2 + u^2 - 2wu \cos ABD$, oder,

weil $\cos ABD = \cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$,

$$1) \quad v = \sqrt{w^2 + u^2 + 2wu\cos\alpha};$$

ebenso gilt $\sin\varphi : \sin ABD = u : v$, also, weil $\sin ABD = \sin\alpha$,

$$2) \quad \sin\varphi = \sin\alpha\,\frac{u}{v}.$$

Gl. 1 liefert die Grösse, Gl. 2 sodann die Richtung von v. Dabei ist zu bemerken, dass die Strecken w und v stets in der Weise an einander zu setzen sind, dass die Pfeile in dem Zuge ABD übereinstimmenden Umfahrungssinn haben, und dass dann der Pfeil von v stets vom Anfange A nach dem Endpunkte D des Streckenzuges gerichtet ist.

Je kleiner der Winkel α wird, desto mehr nähert sich u der Richtung von AB, desto näher fällt also auch v der Richtung von w. Fallen schliesslich w und u in dieselbe Richtung, so wird $\alpha = 0$, $\cos\alpha = 1$, $\sin\alpha = 0$ und man erhält $v = w + u$; $\varphi = 0$. In diesem Falle wird die Mittelgeschwindigkeit v, welche allgemein die geometrische Summe von w und u, auch arithmetisch gleich der Summe von w und u.

Je mehr sich der Winkel α dem Winkel π nähert, desto niedriger wird wiederum das Geschwindigkeits-Dreieck, desto kleiner wird die Schlussseite v. Ist $\alpha = \pi$, so wird $\cos\alpha = -1$, $\sin\alpha = 0$, mithin, wenn $w > u$ gedacht ist, $v = w - u$; $\varphi = 0$.

In beiden Fällen $\alpha = 0$ und $\alpha = \pi$ wird v die algebraische Summe von w und u, nämlich $w + u$ bezw. $w - u$.

Von besonderer Wichtigkeit ist noch der Fall, wo die beiden Seitengeschwindigkeiten zu einander rechtwinklig stehen (Fig. 23). Es ist dann

$$v = \sqrt{w^2 + u^2}; \quad \operatorname{tg} \varphi = u : w.$$

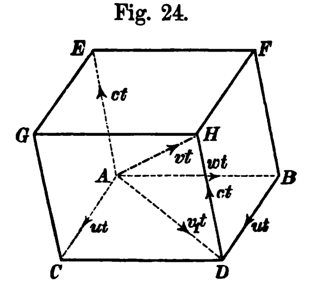
Fig. 23.

Ist z. B., bezogen auf Sekunden und Meter, $w = 2$, $u = 1$, so wird

$$v = \sqrt{5} = 2{,}236; \ \operatorname{tg} \varphi = 1/2, \quad \varphi = 26^\circ\, 34'.$$

3) Hat man 3, nicht in derselben Ebene liegende, gleichförmige Seitenbewegungen mit den Geschwindigkeiten w, u und c zusammenzusetzen (Fig. 24), so liefern zunächst zwei derselben, AB und AC, als Mittelbewegung wiederum eine geradlinige gleichförmige Bewegung AD mit der Geschwindigkeit v_1, welche aus dem Streckenzuge AB und BD als AD gefunden wird. Fügt man nun zu der Bewegung AD noch die dritte Seitenbewegung AE hinzu, so hat man wiederum 2 geradlinige, gleichförmige Bewegungen zusammenzusetzen; man verlegt daher ct parallel an den Endpunkt D von AD und erhält H als Endpunkt der wahren oder Mittelbewegung, welche geradlinig und gleichförmig von A nach H erfolgen muss.

Fig. 24.



Lässt man in Fig. 24 $t = 1$ werden, so erscheint die wahre oder Mittelgeschwindigkeit v als Diagonale eines Parallelepipeds aus den 3 Seitengeschwindigkeiten, oder als die Schlussseite eines räumlichen, aus den 3 Seitengeschwindigkeiten gebildeten Streckenzuges, welche man auch wiederum die geometrische Summe der Seitengeschwindigkeiten nennen kann.

Dieser Satz vom Parallelepiped oder (räumlichen) Viereck der Geschwindigkeiten erhält auch Gültigkeit für ungleichförmige Seitenbewegungen, wenn man dieselben Betrachtungen anstellt, wie auf S. 20 bezüglich zweier Seitenbewegungen geschah.

Stehen die 3 Seitengeschwindigkeiten rechtwinklig zu einander (Fig. 25), so wird die wahre (resultirende) oder Mittelgeschwindigkeit

$$v = \sqrt{w^2 + u^2 + c^2},$$

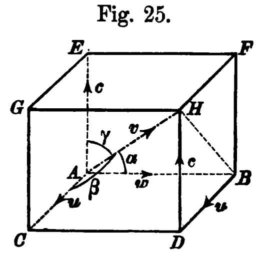


Fig. 25.

und für die Neigungswinkel α, β und γ der Geschwindigkeit v gegen die Richtungen w, u und c ergiebt sich, weil die Seitenfläche $BDHF$ rechtwinklig zu w steht, also auch $\measuredangle\, ABH$ ein Rechter, $\cos \alpha = w : v$; ebenso $\cos \beta = u : v$ und $\cos \gamma = c : v$.

b) Zusammensetzung der Beschleunigungen.

1) Ein Massenpunkt habe zwei gleichförmig beschleunigte Seitenbewegungen AB und AC, welche beide mit den Geschwindigkeiten Null beginnen. Die Beschleunigungen seien p und q (Fig. 26); dann ist in t Zeiteinheiten (nach Gl. 5, S. 12):

$$AB = {}^1\!/_2\, p\, t^2;\quad BD = {}^1\!/_2\, q\, t^2,$$

in t_1 Zeiteinheiten:

$$AB_1 = {}^1\!/_2\, p\, t_1{}^2;\quad B_1 D_1 = {}^1\!/_2\, q\, t_1{}^2.$$

Fig. 26.

Die wahren Orte des Massenpunktes sind D bezw. D_1. Dann ist $\frac{AB}{AB_1} = \frac{t^2}{t_1{}^2} = \frac{BD}{B_1 D_1}$; es sind also die Dreiecke ABD und AB_1D_1 ähnlich, daher die wahre Bewegung geradlinig. Für die Wegeslängen gilt aber $\frac{AD}{AD_1} = \frac{AB}{AB_1} = \frac{t^2}{t_1{}^2}$, oder sie sind mit den Quadraten der entsprechenden Zeiten verhältnisgleich. Für ein solches Bewegungsgesetz $s = a t^2$ gilt aber $v = 2 a t$, d. h. die Mittelbewegung ist wiederum eine gleichförmig beschleunigte mit der Anfangsgeschwindigkeit Null. Nennt man sodann die Beschleunigung dieser Bewegung r, so kann $AD = {}^1\!/_2\, r t^2$, $AD_1 = {}^1\!/_2\, r\, t_1{}^2$ gesetzt werden. Wählt man endlich den beliebigen Zeitraum t_1 so, dass ${}^1\!/_2\, t_1{}^2 = 1$ wird, so werden AB_1, B_1D_1 und AD_1 bezw. zu p, q und r, und es erscheint die Beschleunigung der wahren oder Mittelbewegung, welche kürzer die Mittelbeschleunigung genannt wird, ebenso wie die Geschwindigkeit, als Schlusslinie eines aus den Seitenbeschleunigungen

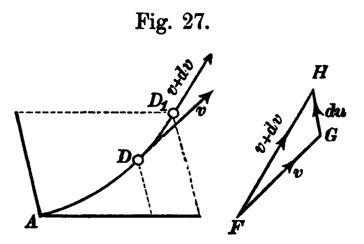
gebildeten Streckenzuges, als geometrische Summe der Seitenbeschleunigungen, oder als Diagonale eines Parallelogramms aus den Seitenbeschleunigungen.

2) Dies gilt einstweilen nur, wenn die beiden Seitenbewegungen gleichförmig beschleunigt sind und mit der Geschwindigkeit Null beginnen, sodass die Mittelbewegung geradlinig wird. Erfolgen die Seitenbewegungen aber nach beliebigen Bewegungsgesetzen, so entsteht eine krummlinige Bewegung, und für diese muss der Begriff der Beschleunigung erst eine Verallgemeineruug erfahren.

Die Richtung der Geschwindigkeit fällt nach Seite 20 mit der Bewegungsrichtung zusammen. Bei einer geradlinigen Bewegung bleibt also die Richtung der Geschwindigkeit dieselbe, es ändert sich nur deren Grösse, und zwar während des Zeittheilchens dt um $dv = p\,dt$. Diese Vergrösserung von v kann man nun auch so auffassen, als ob zu der früheren Geschwindigkeit v eine neue Geschwindigkeit $dv = p\,dt$ hinzugetreten wäre, und man nennt diese letztere die Elementarbescheunigung, welche mittels Theilung durch das Zeittheilchen dt die (auf die Zeiteinheit bezogene) Beschleunigung $p = dv : dt$ liefert.

Bei der krummlinigen Bewegung ändert sich während eines Zeittheilchens dt sowohl die Grösse, wie auch die Richtung der Geschwindigkeit (Fig. 27); diejenige Geschwindigkeit nun, welche mit der im Zeitpunkte t vorhandenen Geschwindigkeit v zusammengesetzt werden muss, um mit ihr die für den Zeitpunkt $t + dt$ geltende Geschwindigkeit $v + dv$ nach Grösse und Richtung zu ergeben, heisst wiederum die Elementarbeschleunigung, welche dann, durch dt getheilt, die Beschleunigung p der krummlinigen Bewegung im Zeitpunkte t nach Grösse und Richtung liefert.

Fig. 27.

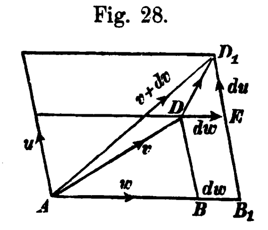


Stellt also in Fig. 27 FG die Geschwindigkeit v im Zeitpunkte t, FH die Gesehwindigkeit $v + dv$ im Zeitpunkte $t + dt$ dar, so ist GH die Elementarbeschleunigung $= du$. Letztere kann offenbar als die geometrische Differenz zwischen $v + dv$ und v, oder weil sie unendlich klein, als das geometrische Differential von v bezeichnet werden.

Die Beschleunigung p der krummlinigen Bewegung ADD_1 im Zeitpunkte t bezeichnet man nun als $p = du : dt$, d. h. als die geometrische Abgeleitete von v nach t und als mit der Richtung von du übereinstimmend. Die Beschleunigung weicht hiernach bei krummliniger Bewegung stets von der Bewegungsrichtung (v) ab.

Bei der Zusammensetzung zweier beliebigen geradlinigen Seitenbewegungen ist nun die Geschwindigkeit $v = AD$ im Zeitpunkte t (Fig. 28) die Mittelgeschwindigkeit aus w und u, die Geschwindigkeit $v + dv = AD_1$ im Zeitpunkte $t + dt$ die Mittelgeschwindigkeit aus $w + dw$ und $u + du$. Legt man beide Streckenzüge so aufeinander, dass v und $v + dv$ gemeinsamen Anfangspunkt A haben, so ist DD_1 die geometrische Differenz von $v + dv$ und v, oder die Elementarbeschleunigung $= r dt$, wenn r die Beschleunigung. DD_1 ist aber die Schlussseite eines aus $dw = p dt$ und $du = q dt$ gebildeten Streckenzuges DED_1. Dasselbe Verhältnis muss also auch zwischen v, p und q bestehen; mithin gilt auch für zwei beliebige geradlinige Seitenbewegungen das auf S. 23 unter 1 ausgesprochene Gesetz für die Beschleunigung.

Fig. 28.



Für die Berechnung der Grösse und Richtung der Mittelbeschleunigung r gelten dieselben Formeln wie für die Geschwindigkeit (S. 21); man braucht in denselben nur w, u und v mit p, q und r zu vertauschen.

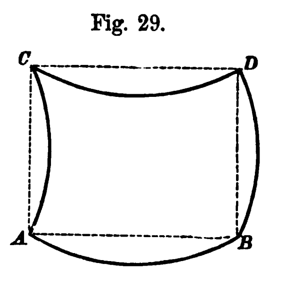
Ähnliche Betrachtungen, wie solche bezüglich der Geschwindigkeiten (S. 22 und 23) angestellt wurden, führen auch leicht zum Satze vom Parallelepiped oder Viereck der Beschleunigungen.

c) Zusammensetzung krummliniger Seitenbewegungen.

Die im Vorstehenden ausführlich entwickelten Gesetze für die Zusammensetzung von zwei oder drei Bewegungen, deren Geschwindigkeiten und Beschleunigungen bleiben auch noch gültig, wenn die Seitenbewegungen nicht geradlinig, sondern krummlinig erfolgen. Unerlässliche Bedingung hierfür ist aber, dass die bewegliche Bahnlinie eine reine Parallelverschiebung erfahre.

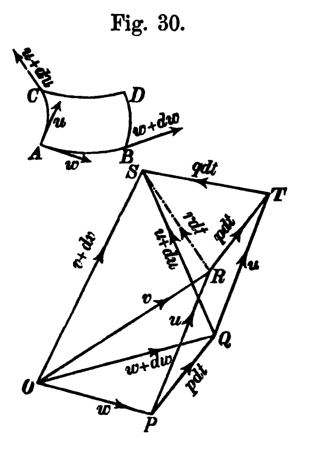
Bewegt sich der Massenpunkt in der Bahnlinie AB (Fig. 29), während diese eine Verschiebung in die Lage CD erfährt, so erkennt man leicht, dass D der Ort des Massenpunktes nach der Bewegung sein muss, und dass es gleichgültig ist, ob man den Punkt D mittels der wahren Bewegungslinien AB, AC und BD festlegt, oder ob man die Sehnen AB, AC und BD benutzt und aus ihnen ein Parallelogramm oder einen Streckenzug ABD bildet. Auch für die Geschwindigkeit v der wahren Bewegung in irgend einem Zeitpunkte t muss der früher (S. 21) bewiesene Satz aus dem Grunde gültig bleiben, weil mit dem Begriffe der Geschwindigkeit grundsächlich die Vorstellung verbunden ist, dass man jede krummlinige Bewegung für ein unendlich kleines Zeittheilchen als geradlinig und gleichförmig betrachten darf, sodass man es in jedem Zeitpunkte nur mit der Zusammensetzung der Geschwindigkeiten solcher einfachen Bewegungen zu thun hat.

Fig. 29.



Dass auch bezüglich der Beschleunigungen das Entsprechende gilt, ergiebt sich durch folgende Betrachtung: AB und AC (Fig. 30) seien die Seitenbewegungen während eines Zeittheilchens; w und $w + dw$ bezw. u und $u + du$ die Seitengeschwindigkeiten zu Anfang und zu Ende desselben. Man trage w und $w + dw$ von einem Punkte O aus auf. Setze daran die Strecken $PR = u$ bezw. $QS = u + du$. Dann ist $OR = v$ die wahre Geschwindigkeit im Zeitpunkte t, $OS = v + dv$ diejenige im Zeitpunkte $t + dt$. Darnach wird dann $RS = r\,dt$ die Elementarbeschleunigung und $r = RS : dt$ die Beschleunigung der Mittelbewegung; $PQ = p\,dt$ ist die Elementarbeschleunigung der ersten Seitenbewegung. Macht man nun $QT =$ und $\parallel PR = u$, so wird $TS = q\,dt$ die zweite Elementarbeschleunigung, und weil

Fig. 30.



$$RT \# PQ = p\,dt,$$

so erscheint $RS = r\,dt$ als Schlusslinie eines Streckenzuges aus

$RT = p\,dt$ und $TS = q\,dt$. Mithin muss auch r die Schlusslinie eines Streckenzuges aus p und q sein. Damit ist der Satz vom Dreieck oder Parallelogramm der Beschleunigungen allgemein bewiesen. Die Erweiterung zum Satze vom Parallelepiped bezw. räumlichen Viereck der Beschleunigungen hat keine Schwierigkeit.

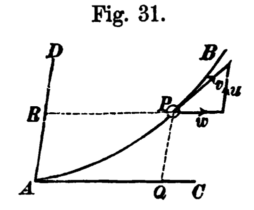
Erfährt aber die Bahnlinie AB nicht eine einfache Parallelverschiebung, sondern eine allgemeinere Bewegung, so werden die Beziehungen der wahren oder Mittelbewegung verwickelter; dieser schwierigere Fall wird erst später in der Allgemeinen Mechanik behandelt.

d) Zerlegung von Bewegungen, Geschwindigkeiten und Beschleunigungen.

Wie man aus 2 bezw. 3 gleichzeitigen Seitenbewegungen mit Hülfe der Gesetze vom Dreieck bezw. Viereck der Bewegungen die Mittelbewegung finden konnte, wie ferner die Seitengeschwindigkeiten und Beschleunigungen zu den Mittel-Geschwindigkeiten und Beschleunigungen sich zusammensetzen liessen, so kann auch umgekehrt jede Bewegung eines Massenpunktes in der Ebene oder im Raume in 2 bezw. 3 geradlinige Seitenbewegungen zerlegt oder durch diese ersetzt werden, und das Gleiche gilt auch bezüglich der Geschwindigkeiten und Beschleunigungen.

Ist z. B. die Bewegung eines Massenpunktes in einer ebenen Kurve AB gegeben (Fig. 31), kennen wir also für jeden Zeitwerth t den Ort P des Punktes in der Kurve, so kann man durch A zwei mit der Kurve in derselben Ebene liegende Gerade AC und AD legen und nach deren Richtungen die gegebene Bewegung zerlegen. Sind PQ und PR parallel zu AC und AD, so kann die gegebene Bewegung AP vollständig durch die Seitenbewegungen ersetzt werden, sobald nur deren Bewegungsgesetze so geregelt sind, dass für jeden Zeitpunkt t die Orte P, Q und R der fraglichen Bewegungen einem solchen Parallelogramme $AQPR$ angehören. Wird aus der Geschwindigkeit v der gegebenen Bewegung und den Seitenrichtungen AC und AD ein Dreieck gezeichnet, so sind die zu AC und AD parallelen Seiten zugleich die Geschwindigkeiten w und u der Seiten-

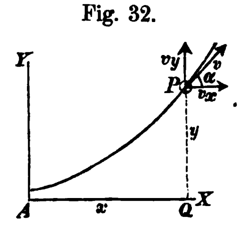
Fig. 31.



bewegungen, oder es ist v in die Seitengeschwindigkeiten w und u zerlegt.

Für die Behandlung krummliniger Bewegungen bietet eine solche Zerlegung ausserordentliche Erleichterung; sie schliesst sich auch unmittelbar dem Verfahren der analytischen Geometrie an, welche ja auch einen Punkt P in eine Ebene durch 2 Koordinaten x und y gegen 2 Achsenrichtungen festlegt. In den meisten Fällen legt man die Achsen rechtwinklig zu einander.

Fig. 32.



Soll die Bewegung des Punkes P (Fig. 32) in der xy-Ebene völlig bekannt sein, so muss man für jeden Zeitpunkt t sowohl x als auch y kennen, oder es müssen x und y als Funktionen von t gegeben sein. Jede der Funktionen $x = f(t)$ und $y = \varphi(t)$ kann aber für sich allein als das Gesetz einer geradlinigen Seitenbewegung aufgefasst werden, und zwar würden für den Zeitpunkt t die Seitenbewegungen $AQ = x$ und $PQ = y$ sein, deren Vereinigung den Massenpunkt richtig nach seinem Orte P führt. Diese beiden Bewegungsgleichungen bestimmen die Bewegung des Massenpunktes vollständig und in einfachster Weise. Bezeichnet man die Seitengeschwindigkeiten in den beiden Achsenrichtungen mit v_x und v_y, ebenso die Seitenbeschleunigungen mit p_x und p_y, so ist nach S. 6

$v_x = \frac{dx}{dt}$; $v_y = \frac{dy}{dt}$. Für die wahre Geschwindigkeit gilt dann

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dt},$$

also, wie bei der geradlinigen Bewegung $v = \frac{ds}{dt}$. Ferner ist

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{v_y}{v_x} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{dy}{dx},$$

d. h. die Richtung der Geschwindigkeit v stimmt mit der Richtung der Bewegung überein.

Nach S. 15 ist

$$p_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}; \quad p_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2};$$

für die wahre Beschleunigung gilt

$$p = \sqrt{p_x^2 + p_y^2} = \sqrt{\left(\frac{d^2 x}{d t}\right)^2 + \left(\frac{d^2 y}{d t}\right)^2} \quad \text{und}$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{p_y}{p_x} = \frac{\frac{d^2 y}{d t^2}}{\frac{d^2 x}{d t^2}}.$$

Da dieser Werth im Allgemeinen von $\operatorname{tg} a = \frac{d y}{d x}$ verschieden ist, so fallen, wie bereits S. 25 besprochen, die Richtungen der Beschleunigung und der Bewegung im Allgemeinen **nicht** zusammen.

Erfolgt die Bewegung des Massenpunktes nicht in einer Ebene, sondern in einer räumlichen Kurve, so sind die 3 rechtwinkligen Koordinaten des Ortes P als Funktionen der Zeit auszudrücken, und es können dann wieder die Gleichungen $x = f(t)$; $y = \varphi(t)$; $z = \psi(t)$ als Gesetze dreier Seitenbewegungen aufgefasst werden, deren Zusammenwirken die räumliche Bewegung des Massenpunktes vollständig wiedergiebt. Es entsteht in ähnlicher Weise

$$v_x = \frac{d x}{d t}; \quad v_y = \frac{d y}{d t}; \quad v_z = \frac{d z}{d t}; \quad v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \frac{d s}{d t};$$

ferner nach S. 23

$$\cos a = \frac{v_x}{v} = \frac{d x}{d s}; \ \cos \beta = \frac{v_y}{v} = \frac{d y}{d s}; \ \cos \gamma = \frac{v_z}{v} = \frac{d z}{d s}.$$

Für die Beschleunigungen ergiebt sich das Entsprechende.

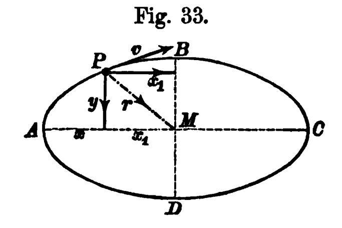
Beispiel: Für eine ebene Bewegung sind gegeben die Gleichungen

$$x = a\ (1 - \cos t); \quad y = b \sin t.$$

Um hieraus die Gleichung der Bahnlinie zu finden, entferne man t. Es wird

$$\cos t = \frac{a - x}{a}; \quad \sin t = \frac{y}{b},$$

Fig. 33.



mithin durch Quadriren und Zusammenzählen:

$$\cos^2 t + \sin^2 t = 1 = \frac{(a - x)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}.$$

Dies ist die Gleichung einer Ellipse (Fig. 33), aber nicht bezogen auf den Mittelpunkt M, sondern auf den Endpunkt A der Halbachse a. Denn sobald man $a - x = x_1$ setzt, wird aus obiger Gleichung die bekannte Formel $1 = \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$.

Die Seitengeschwindigkeiten sind:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = a \sin t = \frac{a}{b} y$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = b \cos t = b \left(1 - \frac{x}{a}\right).$$

Für $t = 0$ ist $x = y = 0$; $v_x = 0$; $v_y = b$ (entsprechend dem Punkte A);
für $t = {}^1/_2\, \pi = 1{,}57$ Sek. ist $\sin t = 1$, $\cos t = 0$,

$x = a$; $y = b$; $v_x = a$; $v_y = 0$, entsprechend dem Punkte B;

für $t = \pi = 3{,}14$ Sek. ist $\sin t = 0$, $\cos t = -1$,

$x = 2\,a$; $y = 0$; $v_x = 0$; $v_y = -b$, entsprechend dem Punkte C;

für $t = {}^3/_2\, \pi$ ist $\sin t = -1$, $\cos t = 0$,

$x = a$; $y = -b$; $v_x = -a$; $v_y = 0$, entsprechend dem Punkte D.

Für fortlaufende Zeit nehmen x und y immer wieder dieselben Werthe an, wenn sich t jedes Mal um $2\,\pi$ geändert hat. Die Ellipse wird hiernach fortwährend in derselben Richtung durchlaufen, und ein Umlauf erfordert $2\,\pi$ Sekunden. Für die Beschleunigungen gilt

$$p_x = \frac{dv_x}{dt} = a \cos t = a - x = x_1$$

$$p_y = \frac{dv_y}{dt} = -b \sin t = -y.$$

Die Seitenbeschleunigungen werden also der Grösse nach gemessen durch die Mittelpunkts-Koordinaten des Punktes P, u. zw. ist $p_x = a - x = x_1$ nach rechts, $p_y = -y$ aber, wegen des negativen Zeichens, nach unten gerichtet. Es wird

$$p = \sqrt{(a-x)^2 + y^2} = r = \text{dem Mittelpunkts-Fahrstrahle } PM,$$

u. zw. ist der Sinn von p stets nach dem Mittelpunkte M gerichtet.

4. Physikalische Grundgesetze der Mechanik.

In dem Vorstehenden haben wir die Bewegungen als gegeben angesehen und gewisse kennzeichnende Merkmale und Eigenschaften derselben aufgeführt. Die Betrachtungen waren rein mathematische; wenn auch das Bewegliche als Massenpunkt bezeichnet wurde, so geschah dies nur zur Erleichterung der Vorstellung.

Wollen wir nun aber die Bewegung eines Massenpunktes aus ihren Ursachen, den Kräften, herleiten, so bedürfen wir gewisser physikalischer Grundgesetze, die sich nicht mathematisch beweisen lassen, die auch nicht ohne Weiteres selbstverständlich sind, deren Richtigkeit aber dadurch genügend sichergestellt ist, dass alle Ergebnisse, welche daraus gezogen werden, mit der Beobachtung übereinstimmen (Erfahrungsgesetze).

Der erste Grundsatz ist das von Galilei im Jahre 1638 ausgesprochene Gesetz der Trägheit: Jeder Massenpunkt bleibt im Zustande der Ruhe oder der geradlinigen, gleichförmigen Bewegung, solange er nicht durch äussere Einwirkungen zu einer Aenderung dieses Zustandes veranlasst wird.

Hiernach bedarf ein Massenpunkt zur Fortsetzung einer Bewegung mit gleichbleibender Richtung und Geschwindigkeit keiner äusseren Einwirkung. Zu einer Abweichung aber von der geradlinig-gleichförmigen Bewegung ist eine Ursache, eine Kraft erforderlich. Eine solche Kraftwirkung, der ein Massenpunkt ausgesetzt ist, geht aber, so lehrt die Erfahrung, stets wieder von einem anderen Massenpunkte aus; man kann daher sagen: Unter „Kraft“ versteht man die Einwirkung eines Massenpunktes auf die Bewegung eines anderen. — Die Wirkung einer Kraft besteht in einer Grössen- oder Richtungs-Aenderung der Geschwindigkeit eines Massenpunktes.

Eine nach Grösse und Richtung gleichbleibende Beschleunigung, wie sie bei der geradlinigen, gleichförmig beschleunigten Bewegung eines Massenpunktes vorkommt, wird als die Wirkung einer ebenfalls nach Grösse und Richtung gleichbleibenden Kraft angesehen. Richtung und Sinn der Kraft werden als übereinstimmend mit denen der entsprechenden Beschleunigung bezeichnet. Derjenige Massenpunkt aber, von dem die Kraftwirkung ausgeht, ist auf der Richtungslinie der Kraft zu suchen.

Wenn auf denselben Massenpunkt zu verschiedenen Zeiten zwei Kräfte K und K_1 wirken und die Beschleunigungen p bezw. p_1 hervorbringen, so bezeichnet man die Grössen der Kräfte als verhältnisgleich mit den Beschleunigungen, setzt also $\frac{K}{K_1} = \frac{p}{p_1}$ oder $\frac{p}{p_1} = \frac{K}{K_1}$. Wenn aber dieselbe Kraftwirkung, auf verschiedene Massenpunkte ausgeübt, die verschiedenen Beschleunigungen p und p_1 hervorbringt, so erklärt man diese abweichende Wirkung aus der verschiedenen Massengrösse der beiden Punkte, und zwar bezeichnet man diejenige Masse als die grössere, welche durch die gegebene Kraft die kleinere Beschleunigung erfährt,

und setzt die Massen m und m_1 in umgekehrtes Verhältnis zu den entstehenden Beschleunigungen p und p_1, also $\frac{m}{m_1} = \frac{p_1}{p}$ oder $\frac{p}{p_1} = \frac{m_1}{m}$. Die Masse eines Körpers ist völlig unveränderlich, wird sogar durch chemische Umwandelung in keiner Weise beeinflusst. Die Beschleunigung aber, die ein Massenpunkt erfährt, ist, wie die Erfahrung lehrt, nur von ihrer Ursache, der Kraftgrösse, und von der Masse des Punktes abhängig. Da nun nach dem Vorstehenden die Beschleunigung einmal in gleichem Verhältnisse zu der Kraft, ein anderes Mal im umgekehrten Verhältnisse zu der Masse steht, so gelangt man zu dem zweiten Grundgesetze, dem Beschleunigungsgesetze: Jede Kraft K, die auf einen Punkt von der Masse m wirkt, ertheilt diesem eine Beschleunigung p, welche verhältnisgleich der Kraft und umgekehrt verhältnisgleich der Masse ist.

Man kann hiernach setzen $p = a \cdot \frac{K}{m}$. Darin bedeutet a eine Zahl, die sich offenbar nach den für die Beschleunigung, Kraft und Masse gewählten Einheiten richtet. Umgekehrt kann man aber auch den Werth a willkürlich annehmen, wenn man zugleich auf die freie Wahl einer der drei Einheiten, z. B. der Masseneinheit, verzichtet. Man hat es nun zweckmässig gefunden, $a = 1$ zu setzen, so dass einfach

$$p = \frac{K}{m}, \tag{1}$$

Beschleunigung $= \frac{\text{Kraft}}{\text{Masse}}$ sich ergiebt. Dies Grundgesetz ist 1687 von Newton ausgesprochen.

Die Beschleunigung messen wir in der Regel nach $\frac{\text{m}}{\text{s.}^2}$; wenn später in einzelnen Fällen es zweckmässig wird, diese Grösse in $\frac{\text{cm}}{\text{s.}^2}$ auszudrücken, so ergiebt sich leicht, welche sonstige Änderung damit verbunden ist.

Wie man die Krafteinheit zweckmässig wählt und wie daraus dann die Masseneinheit sich von selbst ergiebt (in Folge der willkürlichen Setzung $a = 1$), kann erst mit Hülfe des folgenden Grundgesetzes erklärt werden.

Drittes Grundgesetz, Gesetz der Schwere: Die Erde übt auf jeden Massenpunkt an ihrer Oberfläche eine Kraft aus, welche lothrecht abwärts gerichtet ist und jedem Massenpunkte die gleiche Beschleunigung ertheilt. Diese Kraft heisst die Schwerkraft oder das Gewicht des Massenpunktes, und die völlig gleiche Beschleunigung g heisst die Beschleunigung der Schwere oder die Fallbeschleunigung.

Ist also Q das Gewicht einer Masse m, so ergiebt sich hiernach $g = Q : m$, oder — weil g für alle Massen gleich — es ist das Gewicht eines Massenpunktes seiner Masse verhältnisgleich und umgekehrt.

$$Q = mg. \tag{2}$$

Die Fallbeschleunigung g ist für verschiedene Punkte der Erdoberfläche allerdings etwas verschieden, aus Gründen, die später erläutert werden sollen; es ändert das aber an dem vorstehenden Gesetze nichts; denn dieses soll zunächst nur ausdrücken, dass an derselben Stelle der Erdoberfläche verschiedene Massenpunkte übereinstimmende Fallbeschleunigung g erfahren, dass die auf die Massen ausgeübten Schwerkräfte verhältnisgleich ihren Massen sind.

Unter 45° geographischer Breite und in der Höhe des Meeresspiegels beträgt die Fallbeschleunigung $g_{45} = 9{,}806 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$. In Berlin ist $g = 9{,}813$, in Hannover $= 9{,}812$ (S. 94).

Das Gewicht eines Liters Wasser im Zustande der grössten Dichte (bei etwa 4° C.) heisst das Kilogramm und dient als Gewichtseinheit. Da dieser Wasserkörper eine ganz bestimmte Masse enthält, so ist seine Schwere Q wegen der Veränderlichkeit von g an verschiedenen Stellen der Erdoberfläche etwas verschieden. Das Gewicht eines Liters Wasser (bei 4° C.) an denjenigen Stellen der Erde, wo $g = 9{,}806 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$ beträgt, wählen wir zur Krafteinheit und bezeichnen es als Kilogramm (^{kg}). — An anderen Stellen der Erde wird das Gewicht eines Liters Wasser dann von 1^{kg} etwas verschieden ausfallen, sich nämlich verhältnisgleich mit g ändern. Für technische Anwendungen kann diese Veränderlichkeit meist unberücksichtigt bleiben, indem man für die meisten Fälle einfach $g = 9{,}81$ setzt. Nur grundsätzlich muss die

Stelle der Erde bezeichnet werden, wo das Gewicht von 1^l Wasser gleich unserer technischen Krafteinheit, dem Kilogramm, ist.

Um nun die Masseneinheit kennen zu lernen, brauchen wir in der Gleichung $Q = m g_{45}$ nur $m = 1$ zu setzen, dann wird das Gewicht dieser Masseneinheit $Q_1 = g_{45} = 9{,}806^{kg}$.

Die Masseneinheit ist also ein Körper, der unter 45^0 geographischer Breite $9{,}806^{kg}$ wiegt, oder die in 9,806 Litern Wasser von 4^0 C. enthaltene Masse.

Mafseinheiten der Physik. Da die Masse eines Körpers völlig unveränderlich ist, so liegt es eigentlich näher, einen Wasserkörper von abgerundeten Mafsen als Masseneinheit zu Grunde zu legen, wonach dann in Folge der Gleichung 1 (S. 32) mit $K = 1$ und $m = 1$ auch $p = 1$ werden, d. h. diejenige Kraft zur Krafteinheit werden würde, welche der Masseneinheit eine Beschleunigung 1 ertheilt. So bezeichnet die neuere Physik die Masse eines Kubikcentimenters Wasser als Masseneinheit und nennt diese Masseneinheit das Gramm. Als Längeneinheit dient das Centimeter, als Zeiteinheit die Sekunde, sodass die Beschleunigung nach $\frac{\text{cm}}{\text{s.}^2}$ gemessen wird. Die Krafteinheit der Physik, die Dyne, ist diejenige Kraft, welche einem Kubikcentimeter Wasser eine Beschleunigung $= 1 \frac{\text{cm}}{\text{s.}^2}$ ertheilt. Das Gewicht eines Kubikcentimeters Wasser, d. h. $\frac{1}{1000}$ unserer Krafteinheit, ertheilt diesem Körper die Beschleunigung $g = 981 \frac{\text{cm}}{\text{s.}^2}$, ist also gleich 981 Dynen; unsere Krafteinheit, das Kilogramm, daher gleich 981 000 Dynen. Für die technische Anwendung der Mechanik ist die Wahl dieser Krafteinheit, wenngleich sie wissenschaftlich grosse Vorzüge besitzt, nicht recht zweckmässig. Bei den Aufgaben des Technikers kommt es meist darauf an, Schwerkräfte zu benutzen, oder ihnen entgegen zu wirken. Diese Schwerkräfte sind dann unmittelbar in Kilogrammen gegeben, und die Endergebnisse müssen für die Ausführung auch meist Gewichte oder sonstige Kräfte in Kilogrammen ausdrücken. Es würden daher bei den Aufgaben häufig Umwandelungen von Kilogrammen in Dyne und umgekehrt erforderlich werden. Aehnliche Umwandelungen müssen, streng genommen, freilich auch bei der Wahl unserer Krafteinheit ausgeführt werden, wenn die fraglichen Körper sich nicht unter 45^0 geographischer Breite befinden, sondern an einem Orte, wo g von 9,806 abweicht. Doch sind diese Abweichungen meist so gering, dass sie für die Anwendung keine Bedeutung haben.

Viertes Grundgesetz; Gesetz der Wechselwirkung. Die Kräfte, mit denen zwei Massenpunkte auf einander wirken, treten stets paarweise in gleicher Grösse aber entgegengesetztem Sinne auf. Es wurde schon erwähnt (S. 31), dass eine Kraft K, die auf einen Massenpunkt m wirkt, von irgend einem anderen, in der Richtungslinie der Kraft befind-

lichen Massenpunkte m_1 ausgehen müsse. Die Erfahrung lehrt nun aber, dass dann m auf m_1 dieselbe Kraft K, nur in entgegengesetztem Sinne (mit entgegengesetztem Pfeile) ausübt. Dies Gesetz wurde schon von Galilei (! 1564 zu Pisa, † 1642 zu Arcetri) und Huyghens (! 1629 im Haag, † 1695 daselbst) angewandt, ist aber erst von Newton (! 1643 zu Woolstorpe, † 1726 zu Kensington) im Jahre 1687 bestimmt ausgesprochen worden.

Beispiel: Der auf S. 13 behandelte Eisenbahnzug erfuhr bei der sog. Anfahrt eine Beschleunigung $p = 0{,}14 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$. Wenn nun das Gewicht des ganzen Eisenbahnzuges 200 000 kg beträgt, wie gross ist dann die zur Beschleunigung erforderliche Kraft K? Die Masse des Zuges ist $m = 200\,000 : g$ Masseneinheiten, mithin ist $K = mp = 200\,000\ p : g$. Für solche Stellen der Erde, für welche $g = 9{,}81$ gesetzt werden kann, ist $1/g = 0{,}102$ mithin

$$K = 200\,000 \cdot 0{,}14 \cdot 0{,}102 = 2856 \text{ kg}.$$

Setzt man annähernd $g = 10$, $1/g = 0{,}1$, was für überschlägliche Rechnungen zulässig, so wird $K = 2800$ kg.

Beispiel: Das auf S. 14 behandelte Geschoss erfuhr eine Beschleunigung $p = 100\,000$. Wie gross ist die Ausdehnungskraft der Pulvergase, wenn das Geschoss 20 g $= 0{,}02$ kg wiegt? Es ist $m = 0{,}02 : 9{,}81 = 2 : 981$, mithin $K = 2 \cdot 100\,000 : 981 = 204$ kg; für $g = 10$ wird $K = 200$.

5. Geradlinige Bewegung unter alleiniger Einwirkung der Schwere.

Hält man einen Punkt von der Masse m ruhend zwischen den Fingern, so wird die Schwerkraft durch die Muskelkraft der Finger aufgehoben, indem die Kraftwirkungen der Finger auf den Massenpunkt eine Gesammtkraft ausüben, welche dem Gewichte mg genau gleich und entgegengesetzt ist. Oeffnet man aber die Finger der Hand nach unten, so kommt die Schwere zur alleinigen Wirkung und ertheilt dem Massenpunkte die Beschleunigung g. Der Punkt hatte vorher keine Bewegung, d. h. die Geschwindigkeit $c = o$; es entsteht nun eine gleichförmig beschleunigte Bewegung in der Richtung der Schwere, also lothrecht abwärts. Nach t Sekunden ist die Geschwindigkeit im Punkte P (Fig. 34) nach Gl. 2, S. 11:

Fig. 34.

1) $$v = gt,$$

die zurückgelegte Wegeslänge

2) $$s = {}^1\!/_2\, g t^2 \text{ (nach Gl. 4, S. 12).}$$

Wenn man aus Gl. 1 $t = v : g$ entnimmt und in Gl. 2 einsetzt, so entsteht auch

$$3) \qquad s = \frac{g}{2} \frac{v^2}{g^2} = \frac{v^2}{2g} \quad \text{oder} \quad v = \sqrt{2gs}.$$

Die lothrechte Wegeslänge, welche ein Massenpunkt durchfallen muss, um ganz allein durch die Wirkung der Schwere die Geschwindigkeit v zu erreichen, d. h. den Werth $s = \frac{v^2}{2g}$ nennt man die der Geschwindigkeit v entsprechende **Geschwindigkeitshöhe.**

Für $g = 9{,}81$ wird

$\frac{1}{2g} = 0{,}051 =$ rund $0{,}05$ und $\sqrt{2g} = 4{,}429, =$ rund $4{,}4$, mithin

$$s = 0{,}05\ v^2; \quad v = 4{,}4 \sqrt{s}.$$

Beispiel: Durchsinkt ein Massenpunkt in freiem Falle eine Höhe $s = 4^{\text{m}}$, so erreicht er eine Fallgeschwindigkeit $v = 4{,}4 \sqrt{4} = 8{,}8 \frac{\text{m}}{\text{s.}}$. Die dazu erforderliche Zeit ist

$$t = 8{,}8 : 9{,}81 = 8{,}8 \cdot 0{,}1 = 0{,}88^{\text{ s.}}.$$

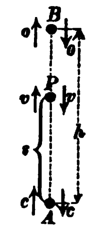
Bei der geradlinigen Bewegung stimmen die Richtungen der Geschwindigkeit und der Beschleunigung überein, bei der krummlinigen aber nicht; mithin kann eine geradlinige Bewegung nur entstehen, wenn die Richtungen der Anfangsgeschwindigkeit und der Beschleunigung übereinstimmen. Ertheilt man also einem Massenpunkte mit der Hand eine derartige Bewegung, dass er in dem Augenblicke, wo die Hand den Punkt freilässt, eine Geschwindigkeit c hat, so ist diese die Anfangsgeschwindigkeit für die unter alleiniger Wirkung der Schwere erfolgende Wurfbewegung, und letztere kann nur geradlinig werden, wenn die Anfangsgeschwindigkeit c lothrecht gerichtet ist.

Ist c lothrecht nach unten gerichtet, so entsteht wiederum eine beschleunigte Bewegung; es wird (Fig. 34) nach t Sekunden

$$v = c + gt; \quad s = ct + \tfrac{1}{2} g t^2 = \frac{(v + c)}{2} t = \frac{v^2 - c^2}{2g},$$

$$\text{also auch} \quad v = \sqrt{c^2 + 2gs}.$$

Fig. 35.



Bei aufwärts gerichtetem Wurfe aber (Fig. 35) entsteht eine gleichförmig verzögerte Bewegung. Nach t Sekunden ist $v = c - gt; \quad s = ct - \tfrac{1}{2} g t^2 = \frac{c^2 - v^2}{2g}$;

$$v = \sqrt{c^2 - 2gs}.$$

Nach $t_1 = c/g$ Sekunden ist die Geschwindigkeit c durch die Verzögerung aufgezehrt; es ist $v = 0$ und damit die grösste mögliche Höhe, die Steighöhe $h = \frac{c^2}{2g}$ erreicht. Die Steighöhe ist hiernach gleich der Geschwindigkeitshöhe, welche der Anfangsgeschwindigkeit c entspricht. Ist der Massenpunkt an der höchsten Stelle B (Fig. 35) mit der Geschwindigkeit Null angelangt, so geht er nun sofort in eine Fallbewegung über; die Geschwindigkeit v_1, mit der der Massenpunkt die Anfangsstelle A wieder erreicht, ist $v_1 = \sqrt{2gh}$ und weil $h = \frac{c^2}{2g}$ war, $v_1 = c$, mithin gleich der aufwärts gerichteten Anfangsgeschwindigkeit, nur jetzt abwärts gerichtet. Auch die Zeit des Niederfallens $t_2 = c/g$ ist gleich der Dauer $t_1 = c/g$ des Steigens; überhaupt erfolgen Abwärts- und Aufwärtsbewegung ganz symmetrisch zu der Höchstlage, insofern jeder Punkt P die Bahnlinie beim Fallen mit derselben Geschwindigkeit v durchlaufen wird wie beim Steigen.

Beispiel: Ein Massenpunkt werde mit der Geschwindigkeit $c = 9 \frac{\text{m}}{\text{s.}}$ aufwärts geworfen. Dann ist die Steighöhe $h = c^2 : 2g = 81 \cdot 0{,}05 = 4{,}05^{\text{m}}$; die Steigdauer $t_1 = c/g = 9 \cdot 0{,}1 = 0{,}9^{\text{s.}}$. Ebenso lange währt das Herabfallen; mit der Geschwindigkeit $c = 9 \frac{\text{m}}{\text{s.}}$ trifft der Punkt unten wieder ein. — Wurfgeschwindigkeiten, die man einem Massenpunkte ertheilt, lassen sich schwer unmittelbar abmessen oder beurtheilen. Dazu kann aber ein aufwärts gerichteter Wurf dienen, indem man die Dauer der Steig- und Fallbewegung zusammen beobachtet. Nennt man diese t_3, so ist $t_3 = 2\,c/g$, mithin $c = \frac{1}{2} g t_3$.

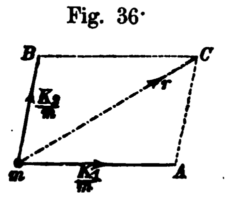
Ein Massenpunkt werde lothrecht aufwärts geworfen und lange nach $t_3 = 6$ Sek. unten wieder an. Dann war seine Anfangsgeschwindigkeit $c = \frac{1}{2} g \cdot 6 =$ rund 30, die erreichte Höhe $h = \frac{c^2}{2g} = \frac{1}{4}\frac{g^2 t_3^2}{2g} = \frac{1}{8} g t_3^2 = 45^{\text{m}}$.

Bei all diesen Betrachtungen war vorausgesetzt, dass auf den Massenpunkt nur die Schwere als Kraft wirkt. Bei Fall- und Wurfbewegungen in freier Luft tritt aber ein Luftwiderstand der Bewegung entgegen, der an dieser Stelle noch nicht berücksichtigt werden kann. Es sei nur bemerkt, dass dieser Widerstand unbedeutenden Einfluss hat bei Massenpunkten aus dichtem Stoffe und bei kleinen Geschwindigkeiten. Wirft man eine Blei- oder Eisenkugel mit der Hand, so kann der Luftwiderstand meist vernachlässigt werden, während lockere Massen einen grossen Luftwiderstand erfahren. Auch bei den grossen Geschwindigkeiten der Geschosse hat der (mit dem Quadrate der Geschwindigkeit wachsende) Luftwiderstand so bedeutenden Einfluss, dass vorstehende einfache Gleichungen für solche Fälle durchaus nicht mehr verwendbar sind.

6. Zusammensetzung und Zerlegung der Kräfte.

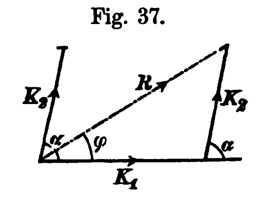
Auf einen Massenpunkt m (Fig 36) mögen gleichzeitig 2 Kräfte K_1 und K_2 wirken; dann bringt nach dem Satze auf S. 32 jede von ihnen eine entsprechende Beschleunigung $p_1 = K_1/m$; $p_2 = K_2/m$ hervor. Denken wir uns diese Beschleunigungen, denen der Punkt m gleichzeitig unterworfen ist, durch mA und mB dargestellt, so lassen sich beide nach dem Satze auf S. 23 durch eine Mittelbeschleunigung r ersetzen, die man erhält, indem man die Seitenbeschleunigungen zu einem Streckenzuge mAC zusammensetzt; die Schlusslinie mC ist dann die wahre oder Mittelbeschleunigung des Punktes m unter der Einwirkung der Kräfte K_1 und K_2. Dieselbe Beschleunigung r würde aber auch entstehen, wenn in der Richtung mC auf den Punkt m eine Kraft $R = mr$ wirkte. Zeichnet man daher einen Streckenzug aus den Kräften K_1 und K_2 (statt aus den Beschleunigungen), so wird die Schlusslinie die Grösse $R = mr$ bekommen und nach Richtung und Sinn mit r übereinstimmen. Die so erhaltene Kraft R ist dann den gegebenen Kräften K_1 und K_2 völlig gleichwerthig und heisst ihre Mittelkraft oder Resultirende. Es folgt also der Satz vom Dreieck (oder vom Parallelogramm) der Kräfte: Die Mittelkraft zweier gegebenen Kräfte wird nach Grösse, Richtung und Sinne durch die Schlussseite des aus den gegebenen Kräften gebildeten Streckenzuges, also die geometrische Summe der Seitenkräfte, (oder durch die Diagonale des aus ihnen gezeichneten Parallelogramms) dargestellt.

Fig. 36.



Für die Berechnung ergeben sich (Fig. 37), wie bei der Zusammensetzung der Geschwindigkeiten (S. 21) gezeigt wurde, die Formeln:

Fig. 37.



$$R = \sqrt{K_1^2 + K_2^2 + 2\,K_1\,K_2 \cos \alpha}$$

$$\sin \varphi = \sin \alpha \,\frac{K_2}{R}.$$

Wird $\alpha = 0$, d. h haben die beiden Kräfte übereinstimmende Richtung und gleichen Sinn, so wird die Mittelkraft die wirkliche

Summe; haben sie aber (für $\alpha = \pi$) entgegengesetzten Sinn, so wird die Mittelkraft gleich dem Unterschiede der gegebenen Kräfte und bekommt den Sinn der grösseren von beiden. In diesen beiden Fällen stimmt die geometrische Summe mit der algebraischen Summe überein. Werden in letzterem Falle noch die beiden entgegengesetzten Kräfte K einander gleich, so ergiebt sich die Mittelkraft zu Null; es bewegt sich dann der Massenpunkt ebenso, als ob gar keine Kraft auf ihn einwirkte, man sagt daher:

Zwei gleiche, aber entgegengesetzt gerichtete Kräfte heben sich an einem Massenpunkte vollständig auf oder halten einander das Gleichgewicht.

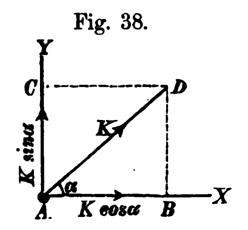
Stehen die beiden Kräfte rechtwinklig zu einander, so wird $R = \sqrt{K_1^2 + K_2^2}$; $\operatorname{tg} \varphi = K_2 : K_1$.

Kommt zu den Kräften K_1 und K_2 noch eine dritte K_3 hinzu, die mit K_1 und K_2 nicht in derselben Ebene liegt, so hat man diese mit der Mittelkraft der beiden ersteren zusammenzusetzen, um die Mittelkraft R aller dreier Kräfte zu erhalten Wie bei der Zusammensetzung der Geschwindigkeiten (S. 22) ausführlich erläutert, ergiebt sich dann die **Mittelkraft als Diagonale eines Parallelepipeds aus den drei Seitenkräften, oder als die Schlussseite eines räumlichen Streckenzuges der Seitenkräfte oder wiederum als deren geometrische Summe.**

Wie Geschwindigkeiten und Beschleunigungen lassen sich selbstverständlich auch Kräfte in zwei bezw. drei Seitenkräfte zerlegen und durch diese völlig ersetzen.

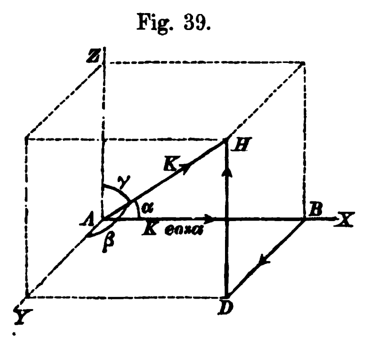
Soll eine Kraft K nach zwei rechtwinklig auf einander stehenden, mit ihr in derselben Ebene liegenden Achsenrichtungen zerlegt werden (Fig. 38), so zieht man durch den Endpunkt D der Kraftstrecke AD eine Parallele DB zu AY; dann ist ABD der Streckenzug der Seitenkräfte. Schliesst K mit der X-Achse den Winkel α ein, so erhält man $K \cos \alpha$ und $K \sin \alpha$ als die Seitenkräfte. Soll die Zerlegung aber nach drei rechtwinklig zu einander stehenden Richtungen erfolgen (Fig. 39), welche mit der Kraft K bezw. die Winkel α, β und γ

Fig. 38.



einschliessen, so fällt man von H ein Loth HD auf die xy-Ebene und hat damit die in die z-Achse fallende Seitenkraft $K \cos \gamma$ mit dem Sinne von D nach H. Eine Parallele durch D zur y-Achse liefert die Seitenkraft $BD = K \cos \beta$ für die y-Richtung, und endlich ist $AB = K \cos \alpha$ die Seitenkraft in der x-Richtung (vergl. S. 23, Fig. 25).

Fig. 39.



Greifen nun an einem Massenpunkte beliebig viele Kräfte K_1, $K_2 \ldots K_n$ mit beliebigen Richtungen an und will man deren Mittelkraft R nach Grösse und Richtung finden, so legt man durch den Massenpunkt ein dreiachsiges Achsenkreuz, dessen Achsen mit den gegebenen Kräften die als bekannt zu betrachtenden Richtungswinkel α_1, β_1, γ_1; α_2, β_2, γ_2; ... α_n, β_n, γ_n einschliessen. Sodann zerlegt man jede der gegebenen Kräfte in drei Seitenkräfte, welche mit den Achsenrichtungen zusammenfallen, ersetzt also K_1 durch $K_1 \cos \alpha_1$, $K_1 \cos \beta_1$, $K_1 \cos \gamma_1$ u. s. f. Dadurch erhält man freilich die dreifache Anzahl der Kräfte, die aber nun in drei ganz bestimmten Richtungen liegen. Dann können die in die x-Richtung fallenden Seitenkräfte $K_1 \cos \alpha_1$, $K_2 \cos \alpha_2 \ldots K_n \cos \alpha_n$ durch eine einzige in derselben Richtung wirkende Kraft X gleich der algebraischen Summe der Seitenkräfte

$$X = K_1 \cos \alpha_1 + K_2 \cos \alpha_2 + \ldots\ldots + K_n \cos \alpha_n,$$

was man kürzer schreibt $X = \Sigma K \cos \alpha$, ersetzt werden, während sich in den anderen Richtungen in gleicher Weise ergiebt:

$$Y = \Sigma K \cos \beta; \quad Z = \Sigma K \cos \gamma.$$

Die drei rechtwinklig zu einander stehenden Seitenkräfte X, Y, Z lassen sich nun durch ihre geometrische Summe

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$$

ersetzen, welche mit den drei Achsenrichtungen die Winkel α, β und γ einschliesst. Da nun X die Seitenkraft von R in der x-Richtung, also $X = R \cos \alpha$, so wird $\cos \alpha = \frac{X}{R}$, ebenso $\cos \beta = \frac{Y}{R}$,

$\cos\gamma = \frac{Z}{R}$. Damit ist die Mittelkraft R nach Grösse und Richtung bestimmt. Da in den algebraischen Summen auf die Reihenfolge der Summanden nichts ankommt, so ist die Reihenfolge in der Zusammensetzung der Kräfte gleichgültig.

Auch durch Zeichnung kann man beliebig viele, beispielsweise vier Kräfte K_1 bis K_4 zusammensetzen. Von einem beliebigen Punkte A aus setze man in einer Hülfsfigur 40a zuerst K_1 und K_2 zu einem Streckenzuge zusammen; dann ist die Schlusslinie $AC = R_2$ die Mittelkraft beider. Mit dieser fügt man in gleicher Weise K_3 zusammen, indem man den Streckenzug R_2, K_3 mit der Mittelkraft $R_3 = AD$ bildet. Daran schliesst sich in gleicher Weise K_4. Die Strecke AE, welche dann den gesammten Streckenzug der Kräfte K_1 bis K_4 schliesst, ist offenbar die Mittelkraft R der gegebenen Seitenkräfte und ergiebt sich wiederum als die geometrische Summe der Kräfte. Verlegt man diese nach Grösse, Richtung und Sinn bestimmte Mittelkraft an den Massenpunkt m bei P (Fig. 40), so ist die Aufgabe gelöst. Die Hülfsfigur 40a heisst (nach G. Lang) das Kraftteck. Diese Figur ist leicht zu zeichnen, wenn die gegebenen Kräfte in derselben Ebene, der Zeichenebene, liegen. Man erkennt aber leicht, dass, wenn diese Bedingung nicht erfüllt ist, das Krafteck grundsätzlich seine Bedeutung beibehält; nur bildet der Streckenzug der Kräfte dann ein räumliches Krafteck; aber immerhin stellt die Schlusslinie, die geometrische Summe der Kräfte, auch in solchen Fällen ihre Mittelkraft dar, deren zeichnerische Bestimmung dann freilich die Auftragung in Grundriss und Aufriss nach den Lehren der darstellenden Geometrie erfordert. Ist die Schlusslinie = Null, so halten sich die Kräfte im Gleichgewichte. Weiteres s. S. 65.

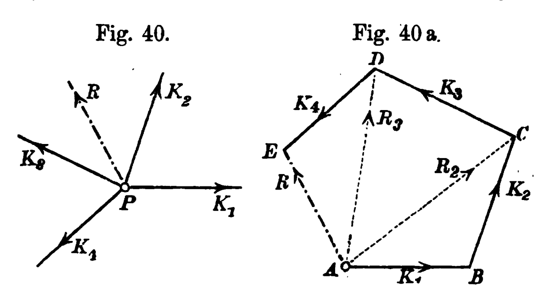


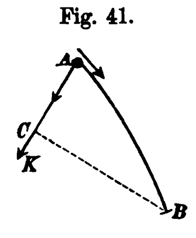
Fig. 40. Fig. 40a.

7. Mechanische Arbeit einer Kraft.

Ein Massenpunkt m führe unter Einwirkung beliebiger Kräfte eine Bewegung von A nach B aus (Fig. 41). Eine der wirkenden

Kräfte K sei gleichbleibend nach Grösse und Richtung, so dass sie während der Bewegung stets ihrer Anfangsrichtung parallel bleibt. Ist dann AC die rechtwinklige Projektion der Bahnlinie AB auf die Richtung der Kraft K, so nennt man AC die in der Kraftrichtung zurückgelegte Wegeslänge. Das Produkt aus der Kraft K und der in ihrer Richtung zurückgelegten Wegeslänge AC heisst dann die während der Bewegung AB von der Kraft K verrichtete **mechanische Arbeit** $\mathfrak{A}$.

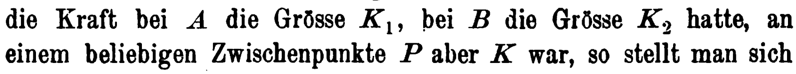
Fig. 41.



Die in der Kraftrichtung zurückgelegte Wegeslänge AC gilt als positiv, wenn ihr Sinn mit dem der Kraft übereinstimmt (Fig. 41), und umgekehrt. Bei dem Vorgange nach Fig. 42 ist AC negativ einzuführen und auch die Arbeit von K negativ, nämlich $\mathfrak{A} = -K \cdot AC$.

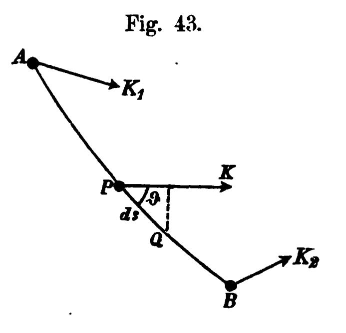
Fig. 42.

Ist die Kraft K nach Grösse und Richtung nicht gleichbleibend, so ist die Bildung des Produktes $K \cdot AC$ nicht möglich Wenn



die Kraft bei A die Grösse K_1, bei B die Grösse K_2 hatte, an einem beliebigen Zwischenpunkte P aber K war, so stellt man sich vor, die Kraft behielte für ein Bewegungstheilchen $PQ = ds$ Grösse und Richtung bei und nähme erst bei Q plötzlich neue Grösse und Richtung an. Diese Vorstellung der sprungweisen Änderung wird mit der wirklichen stetigen Änderung um so mehr übereinstimmend, je mehr das Bahntheilchen ds sich der Null nähert. Für das Bewegungstheilchen ist dann die Arbeit der Kraft K: $d\mathfrak{A} = K\,ds \cos\vartheta$. Als die Arbeit der veränderlichen Kraft K längs der endlichen Bewegung bezeichnet man nun $\mathfrak{A} = \int K\,ds \cos\vartheta$. Die Integration ist nur ausführbar, wenn man die Änderungsgesetze von K und $\cos\vartheta$ kennt.

Fig. 43.

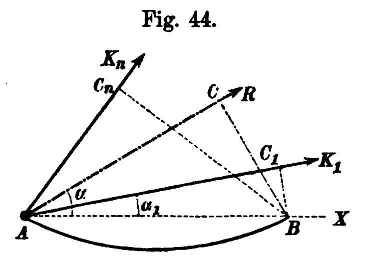


Steht die Kraft während eines beliebigen Theils der Bewegung rechtwinklig zur Bahnlinie, so ist $\cos\vartheta = 0$, also auch $d\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}$ während dieses Bewegungsstückes Null; oder: Eine Kraft ver-

richtet keine mechanische Arbeit, solange sie rechtwinklig zur Bewegungsrichtung steht.

Ein Massenpunkt möge sich nun unter Einwirkung beliebig vieler Kräfte $K_1, K_2 \ldots K_n$ bewegen, von denen in Fig. 44 nur 2 gezeichnet sind; während der Bewegung von A nach B seien die Kräfte gleichbleibend nach Grösse und Richtung (welche Annahme auch für veränderliche Kräfte zulässig ist, sobald man für solchen Fall AB als unendlich klein betrachtet). Es sei R die Mittelkraft von $K_1, K_2 \ldots K_n$. Dann ist für diese (nach S. 40)

Fig. 44.



1) $R \cos a = X = \Sigma K \cos a$.

Fällt man aber von B Rechtwinklige auf die Kraftrichtungen, so ist $\cos a = AC : \overline{AB}$; $\cos a_1 = AC_1 : \overline{AB}$; ... $\cos a_n = AC_n : \overline{AB}$, also nach Gl. 1 (nach Multiplikation mit $\overline{AB}$)

2) $R \cdot AC = K_1 AC_1 + K_2 AC_2 + \ldots K_n AC_n$.

Da aber AC, $AC_1 \ldots AC_n$ die rechtwinkligen Projektionen der Bahnlinie AB auf die Kraftrichtungen sind, so ist die Bedeutung der Gl. 2:

Die mechanische Arbeit, welche sich bei der Bewegung eines Massenpunktes für die Mittelkraft mehrerer auf ihn wirkenden Kräfte ergiebt, ist gleich der algebraischen Summe der Arbeiten dieser Einzelkräfte bei derselben Bewegung.

(Bei veränderlichen Kräften gilt dieser Satz zunächst für ein unendlich kleines Bewegungstheilchen; weil aber als Arbeit einer veränderlichen Kraft die Summe ihrer Arbeitstheilchen bezeichnet ist, so gilt der obige Satz der mechanischen Arbeit ganz allgemein für Kräfte, die an demselben Massenpunkte angreifen.)

Der Ausdruck für das Arbeitstheilchen $d\mathfrak{A} = K\,ds \cos\vartheta$ (S. 42) lässt sich jetzt auch noch anders deuten, als oben geschehen. Man kann nämlich (Fig. 43) K zerlegen in die Seitenkräfte $K \cos\vartheta$ (in die Bewegungsrichtung) und $K \sin\vartheta$ (rechtwinklig dazu).

Erstere liefert die Arbeit $K \cos \vartheta\, ds$, während die andere nach S. 42 die Arbeit Null verrichtet. Die Arbeit von K ergiebt sich daher wiederum zu $d\mathfrak{A} = K \cos \vartheta\, ds$.

Wird die Kraft $K = 1^{\text{kg}}$, die Wegeslänge in ihrer Richtung $= 1^{\text{m}}$, so wird die Arbeit $\mathfrak{A} = K \cdot s = 1 \cdot 1 = 1$, also gleich der Arbeitseinheit. Diese Arbeit, welche von 1^{kg} längs eines Weges $= 1^{\text{m}}$ verrichtet wird, heisst Meterkilogramm (mkg); n^{kg} längs eines Weges $= 1/_n$ Meter verrichten aber ebenfalls die Arbeit $n \cdot \frac{1}{n} = 1^{\text{mkg}}$.

8. Arbeitsvermögen (kinetische Energie oder lebendige Kraft) eines Massenpunktes.

1) Wirkt auf einen Punkt von der Masse m eine mit der Bewegungsrichtung übereinstimmende, nach Richtung und Grösse gleichbleibende Kraft K, so entsteht eine geradlinige, gleichförmig beschleunigte Bewegung von der Beschleunigung $p = K : m$. Ist c die Anfangsgeschwindigkeit, v die Geschwindigkeit nach der Zeit t (Fig. 45), so ist die Wegeslänge (nach Gl. 5, S. 12)

Fig. 45.

$$s = \frac{v^2 - c^2}{2\,p} = \frac{v^2 - c^2}{2\,(K : m)}$$

oder

$$1) \qquad {}^1/_2\, m\, v^2 - {}^1/_2\, m\, c^2 = K\, s\,.$$

Hat ein Punkt von der Masse m in irgend einem Zeitpunkte eine Geschwindigkeit v, so nennt man das Produkt aus seiner Masse mal dem halben Quadrate der Geschwindigkeit, also die Grösse $^1/_2\, m\, v^2$ das (in dem Massenpunkte aufgehäufte) **Arbeitsvermögen.** Älter und noch vielfach gebräuchlich ist dafür die Bezeichnung „lebendige Kraft" (als vis viva von Leibniz [! 1646 zu Leipzig, † 1716 zu Hannover] in die Mechanik eingeführt); da aber der Werth $^1/_2\, m v^2$ mit dem, was wir sonst Kraft nennen, nichts gemein hat, da auch bei dem Fehlen jeder Kraftwirkung, also bei gleichbleibender Geschwindigkeit, der Werth $^1/_2\, m v^2$ bestehen bleibt, so erscheint die Benennung lebendige Kraft wenig zweckmässig. Die Bezeichnung „kinetische Energie" ist als angemessen zu bezeichnen; auch der Name „Wucht" ist dafür empfohlen; wir wollen die Grösse mit Grashof Arbeitsvermögen nennen. Es war

$^1/_2\, m c^2$ das anfängliche, es ist $^1/_2\, m v^2$ das nachherige grössere Arbeitsvermögen. Die linke Seite der Gl. 1 ist also die „Zunahme an Arbeitsvermögen", welche der Massenpunkt durch die Kraft K erfahren hat. Die rechte Seite ist aber die mechanische Arbeit der Kraft K. Gl. 1 bedeutet hiernach:

Die Zunahme des Arbeitsvermögens eines Massenpunktes ist gleich der während der Bewegung an dem Massenpunkte verrichteten mechanischen Arbeit.

Ist der Sinn der Kraft K der Bewegungsrichtung entgegengesetzt (Fig. 46), so entsteht eine verzögerte Bewegung; es ist dann (nach S. 12)

Fig. 46.

$$s = \frac{c^2 - v^2}{2p} = -\frac{v^2 - c^2}{2\,(^K/_m)}, \text{ oder}$$

$$^1/_2\, m v^2 - {}^1/_2\, m c^2 = -Ks.$$

In diesem Falle bewirkt die Kraft K eine Abnahme des Arbeitsvermögens, und zwar wird diese wiederum gemessen durch die von der Kraft geleistete Arbeit (im absoluten Sinne). Da aber die geleistete Arbeit jetzt als negativ aufzufassen ist, so empfiehlt es sich, für die allgemeine Anwendung dieses Satzes auch eine etwaige Abnahme des Arbeitsvermögens $^1/_2\, m c^2 - {}^1/_2\, m v^2$ stets in der Form einer algebraischen Zunahme (deren Werth hier negativ ist) zu schreiben, d. h. stets von dem Endwerthe des Arbeitsvermögens den Anfangswerth abzuziehen und den Unterschied gleich der verrichteten Arbeit zu setzen; dann entspricht eine positive Arbeit einer positiven Zunahme des Arbeitsvermögens, und umgekehrt.

Hatte ein Massenpunkt die Anfangsgeschwindigkeit Null, die Endgeschwindigkeit v, so ist $^1/_2\, m v^2 = Ks$, oder es drückt das Arbeitsvermögen einer Masse m die Arbeit aus, welche verrichtet werden musste, um den Punkt aus der Ruhe in die Geschwindigkeit v zu versetzen. Soll aber die Geschwindigkeit v in Null verwandelt werden, so muss stattfinden

$$0 - {}^1/_2\, m v^2 = -Ks.$$

$^1/_2\, m v^2$ ist also zugleich die absolute Grösse der Verzögerungsarbeit, welche nöthig ist, um eine Masse m von der Geschwindigkeit v zur Ruhe zu bringen. Will man einen Massenpunkt mit der Geschwin-

digkeit c fortwerfen, so muss man mit der Muskelkraft eine Arbeit von der Grösse $\frac{1}{2} m c^2$ auf ihn übertragen. Und dieses Arbeitsvermögen, welches der Massenpunkt in sich trägt, kann, wie wir später sehen werden, wieder zur Arbeitsverrichtung benutzt werden. Das Arbeitsvermögen $\frac{1}{2} m c^2$ ist daher wirklich nur eine besondere Form von mechanischer Arbeit. Dass $\frac{1}{2} m c^2$ auch nach Meterkilogrammen zu messen ist, erkennt man, wenn man mit der Fallbeschleunigung multiplicirt und dividirt; dann wird

$$\frac{1}{2} m c^2 = m g \cdot \frac{c^2}{2g}.$$

Hierin ist mg eine Kraft, $c^2/2g$ aber eine Geschwindigkeitshöhe, d. h. eine Länge, sodass das Produkt in ^{mkg} zu verstehen ist.

Der Satz vom Arbeitsvermögen ist besonders für solche Aufgaben geeignet, wo es wesentlich auf die Grösse der Endgeschwindigkeit, nicht aber auf Beschleunigung und Zeit der Bewegung ankommt.

Beispiel: Der Fall der abwärts gerichteten Wurfbewegung (Fig. 34, S. 35) ist für die Anwendung des vorstehenden Satzes sehr geeignet. Ist die Strecke s durchfallen, so hat die Schwere die Arbeit $+ mgs$ verrichtet. Die Zunahme am Arbeitsvermögen ist daher

$$\frac{1}{2} m v^2 - \frac{1}{2} m c^2 = m g s, \text{ mithin}$$

$$v^2 - c^2 = 2 g s \text{ oder } v = \sqrt{c^2 + 2 g s}.$$

Für die Aufwärtsbewegung (Fig. 35) ist die Arbeit negativ, nämlich $- mgs$, mithin

$$\frac{1}{2} m v^2 - \frac{1}{2} m c^2 = - m g s$$

$$\text{oder } v^2 - c^2 = - 2 g s, \text{ mithin } v = \sqrt{c^2 - 2 g s}.$$

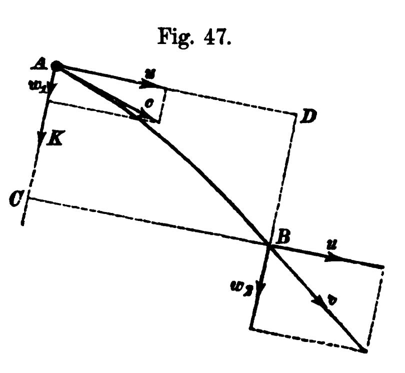
Fasst man die Bewegung vom Punkte P aus zur höchsten Stelle B und wieder zurück nach P zusammen, so ist die ganze Arbeit der Schwere Null, weil aufwärts $- mgs$, abwärts $+ mgs$ verrichtet wurde. Daher kann auch bei der Bewegung von P über B und nach P zurück keine Zunahme an Arbeitsvermögen entstehen, oder die Geschwindigkeit an einem beliebigen Punkte P muss für Abwärts- und Aufwärtsbewegung die gleiche sein.

Ein Eisenbahnzug von 200 000 ^{kg} Gewicht und 25 $\frac{m}{s.}$ Geschw. hat das Arbeitsvermögen $\frac{200\,000 \cdot 25^2}{2\,g} = \frac{62\,500\,000}{g}$ ^{mkg}. — Das Geschoss einer grossen Kanone hat bei 450 ^{kg} Gewicht und 527 $\frac{m}{s.}$ Geschw. ungefähr dasselbe Arbeitsvermögen, nämlich $\frac{450 \cdot 527^2}{2\,g} = \frac{6\,248\,900}{g}$ ^{mkg}. — Die Zugkraft der Lokomotive hat in 180 Sek. längs eines Weges von 2250 ^{m} (nach S. 13) dieselbe Arbeit geleistet, die von der Ausdehnungskraft der Pulverladung in einem

kleinen Bruchtheil einer Sekunde längs des Kanonenrohres verrichtet worden ist (wenn man in beiden Fällen nur diejenigen Theile der Kräfte beachtet, welche zur Beschleunigung dienen, d. h. wenn man die Reibungs- und Luftwiderstände nicht berücksichtigt.)

Es soll nun der Satz vom Arbeitsvermögen auch für krummlinige Bewegung bewiesen werden. Ein Massenpunkt bewege sich unter Einwirkung einer gleichbleibenden Kraft K, die aber nicht mit der Richtung der Anfangsgeschwindigkeit c zusammenfallen möge (Fig. 47); dann ertheilt die Kraft dem Punkte eine Elementarbeschleunigung $p\,dt$ in der Richtung der Kraft. Anfangsgeschwindigkeit und Elementarbeschleunigung liegen in der durch die Richtungen von c und K bestimmten Ebene, daher müssen auch die ferneren Geschwindigkeiten in dieser Ebene verbleiben. Die unter Einwirkung einer gleichbleibenden Kraft entstehende Bahnlinie ist demnach eine ebene Kurve. Daher kann man die Bewegung AB in zwei Seitenbewegungen AC (in der Richtung der Kraft K) und AD (rechtwinklig zur Kraft) zerlegen. Zerlegt man Geschwindigkeiten und Kraft nach denselben Richtungen, so sind diese die Seitengeschwindigkeiten und Seitenkräfte. In der Richtung AD wirkt keine Kraft; in dieser ist daher die Geschwindigkeit dauernd gleich u; in der Richtung AC aber vergrössert sich die Geschwindigkeit von w_1 auf w_2. Für die Seitenbewegung $AC = s$ ist das Gesetz vom Arbeitsvermögen bereits bewiesen, daher

Fig. 47.



2) $$\tfrac{1}{2}\,m\,w_2^2 - \tfrac{1}{2}\,m\,w_1^2 = Ks.$$

Weil aber
$$v^2 = u^2 + w_2^2 \text{ und}$$
$$c^2 = u^2 + w_1^2,$$

so wird $v^2 - c^2 = w_2^2 - w_1^2$, so dass man aus Gl. 1 erhält

3) $$\tfrac{1}{2}\,m\,v^2 - \tfrac{1}{2}\,m\,c^2 = Ks.$$

Ks ist auch für die krummlinige Bewegung AB die Arbeit von K, so dass hiermit das Gesetz vom Arbeitsvermögen auch für krummlinige Bewegungen unter Einwirkung einer gleichbleibenden Kraft nachgewiesen ist.

3) Wird nun der soeben betrachtete Fall noch verallgemeinert, indem man K als veränderlich annimmt, so kann man auf Grund der auf S. 42 gepflogenen Erörterungen behaupten, dass während eines Bewegungstheilchens die Zunahme an Arbeitsvermögen gleich dem Arbeitstheilchen, also $d\,(^1/_2\,m\,v^2) = d\,\mathfrak{A}$ sein muss. Eine Summirung auf beiden Seiten ergiebt dann auch für die endliche Bewegung $^1/_2\,m\,v^2 - {}^1/_2\,m\,c^2 = \mathfrak{A}$.

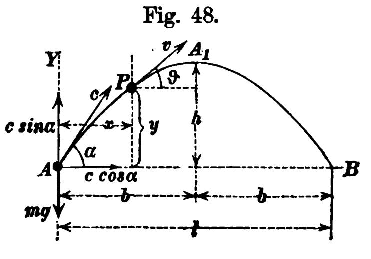
Steht der Massenpunkt unter Einwirkung beliebig vieler Kräfte, so kann man diese für jeden Augenblick durch ihre Mittelkraft R ersetzen, deren Arbeit dann gleich der Zunahme an Arbeitsvermögen sein muss. Da aber nach S. 43 die Arbeit der Mittelkraft gleich der Arbeitssumme der Einzelkräfte, so hat man nun den Satz vom Arbeitsvermögen in der allgemeinen Form:

Die Zunahme an Arbeitsvermögen, welche ein Massenpunkt während einer Bewegung erfährt, ist gleich der algebraischen Summe der mechanischen Arbeiten, welche von allen auf den Punkt wirkenden Kräften während dieser Bewegung verrichtet werden.

9. Parabolische Wurfbewegung.

Wird ein Massenpunkt mit der Geschwindigkeit c schräg aufwärts geworfen unter dem Neigungswinkel α gegen die Wagerechte und der alleinigen Einwirkung der Schwere überlassen, so entsteht, wie bei Fig. 47 erläutert, eine krummlinige Bewegung in einer durch c und die lothrechte Richtung der Schwere bestimmten Ebene.

Fig. 48.



Zerlegt man (Fig. 48) die krummlinige Bewegung in zwei Seitenbewegungen nach der Richtung der Lothrechten AY und rechtwinklig dazu nach AB, so muss die letztere offenbar gleichförmig sein, weil in ihr keine Kraft auftritt. Sie erfolgt demnach mit der Geschwindigkeit $c\cos\alpha$, welche sich durch Zerlegung von c ergiebt. Es ist mithin

1) $$v_x = c\cos\alpha \quad \text{und} \quad v_y = c\sin\alpha - g\,t\,,$$

da die lothrechte Seitenbewegung wegen der Fallbeschleunigung

gleichförmig verzögert wird. Die Neigung von v gegen die Wagerechte ist

$$\operatorname{tg}\vartheta = \frac{v_y}{v_x} = \operatorname{tg}\alpha - \frac{g\,t}{c\cos\alpha}.$$

Die Wegeslängen in beiden Seitenbewegungen sind

$$x = c\cos\alpha\, t \quad \text{und} \quad y = c\sin\alpha\, t - \tfrac{1}{2}\, g t^2.$$

Entfernt man t aus diesen beiden Gleichungen, indem man $t = \frac{x}{c\cos\alpha}$ aus der ersten in die zweite einführt, so entsteht als Gleichung der Bahnlinie

$$y = x\operatorname{tg}\alpha - \frac{g}{2}\,\frac{x^2}{c^2\cos^2\alpha}, \tag{2}$$

welche nach den bekannten Regeln der analytischen Geometrie als Parabel erkannt wird.

Da die lothrechte Seitenbewegung aufwärts und abwärts ganz symmetrisch, die wagerechte aber gleichförmig erfolgt, so schliesst man leicht, dass der ansteigende Theil der Bahnlinie dem abfallenden Theile symmetrisch sein muss, dass also eine Lothrechte durch den höchsten Punkt A'_1 der Bahnlinie die Hauptachse der Parabel sein muss. Bestimmter überzeugt man sich davon noch, indem man die Kurve auf ein durch A_1 gelegtes Achsenkreuz (wagerecht und lothrecht) bezieht. Die Höhe des höchsten Punktes A_1 ist offenbar

$$h = \frac{c^2\sin^2\alpha}{2\,g}, \tag{3}$$

da in der lothrechten Seitenbewegung mit der Anfangsgeschwindigkeit $c\sin\alpha$ nur diese Höhe erstiegen werden kann. Die dazu gehörige Zeit, nach welcher $c\sin\alpha - g\,t = 0$ wird, ist $t_1 = \frac{c\sin\alpha}{g}$, und während dieser erfolgt eine wagerechte Seitenbewegung

$$b = c\cos\alpha\cdot\frac{c\sin\alpha}{g} = \frac{c^2\sin\alpha\cos\alpha}{g}. \tag{4}$$

Hierdurch liegt der höchste Punkt A_1 fest. Setzt man nun

$$x = b - x_1 = \frac{c^2\sin\alpha\cos\alpha}{g} - x_1 \quad \text{und}$$

$$y = h - y_1 = \frac{c^2\sin^2\alpha}{2\,g} - y_1 \quad \text{in Gl. 2 ein,}$$

so ergiebt sich nach einfacher Zusammenziehung

$$x_1^2 = 2\frac{(c \cos a)^2}{g} y_1. \tag{5}$$

Diese Gleichung stellt eine Parabel mit lothrechter Achse und dem Scheitel A_1 dar, und zwar ist der Parameter $\frac{c^2 \cos^2 a}{g}$; es ist demnach diese Grösse, welche die Form der Bahnlinie allein bedingt, nur von der wagerechten Seitengeschwindigkeit $c \cos a$, nicht aber von der lothrechten anfänglichen Seitengeschwindigkeit $c \sin a$ abhängig. Letztere bestimmt aber, weil sie in den Gleichungen 3 und 4 vorkommt, die Lage des Scheitelpunktes A_1 der Wurflinie gegen den Anfangspunkt A.

Besondere Fälle: 1) Ist $a = 0$, wird der Punkt also wagerecht fortgeworfen (Fig. 49), so ist $c \cos a = c$, $c \sin a = 0$, daher werden h und b beide zu Null, und der Anfangspunkt A ist gleichzeitig der höchste Punkt A_1. Der Parameter der Parabel wird $c^2 : g$.

Fig. 49.

Erfolgt aber der Wurf schräg abwärts (Fig. 50), so wird $c \sin a$, den früheren Betrachtungen gegenüber, negativ; es ist dann

$$b = -\frac{c^2 \sin a \cos a}{g}; \quad h = \frac{c^2 \sin^2 a}{2g};$$

mithin liegt dann der Scheitel A_1 in der nach rückwärts verlängerten Bahnlinie, wird also von dem Massenpunkte, der seine Bewegung in A beginnt, nicht mehr durchlaufen.

Fig. 50.

Der zuerst betrachtete Fall (Fig. 48) ist offenbar der vollständigere, da in ihm die abwärts gerichtete Bewegung mit vorkommt.

Die Geschwindigkeit v in einem beliebigen Punkte P der Bahnlinie ergiebt sich am einfachsten nach dem Satze vom Arbeitsvermögen. Während der Bewegung von A nach P verrichtet nämlich die Schwerkraft die Arbeit $-mgy$, daher wird nach Gl. 3, S. 47

$$v = \sqrt{c^2 - 2gy}.$$

Solange der Punkt steigt, solange also y wächst, vermindert sich die Geschwindigkeit, und im Scheitel ist sie am kleinsten, indem

sie dort lediglich aus der wagerechten Seitenbewegung $c \cos \alpha$ besteht. Ist der Scheitel überschritten, sinkt der Massenpunkt, so nimmt v fortgesetzt wieder zu, ist im Punkte B für $y = 0$ wieder gleich der Anfangsgeschwindigkeit c und wird dann immer grösser. Die Entfernung $AB = l$, in welcher der Massenpunkt wieder dieselbe wagerechte Ebene erreicht, von der er ausging, heisst die Wurfweite und ist offenbar $= 2\,b = \dfrac{c^2\, 2 \sin \alpha \cos \alpha}{g}$ oder

$$6) \qquad l = \frac{c^2 \sin 2\,\alpha}{g}.$$

Die Dauer t_2 dieses Wurfes beträgt, da $l = c \cos \alpha\, t_2$ ist,

$$7) \qquad t_2 = 2\,t_1 = \frac{2\,c \sin \alpha}{g}.$$

2) Bei einer Wurf-, Schiess- oder Schleudervorrichtung ist die Geschwindigkeit c meist gegeben, der Winkel α aber beliebig wählbar. Will man eine bestimmte Wurfweite l erreichen, so zeigt Gleichung 6, dass diese mit $\sin 2\,\alpha$ verhältnissgleich ist. Es haben aber zwei Winkel, die sich zu 180^0 ergänzen, die man etwa $90 + \varphi$ und $90 - \varphi$ nennen kann, gleichen Sinus; jede von beiden liefert daher, gleich $2\,\alpha$ gesetzt, den gleichen Werth von $\sin 2\,\alpha$. Sonach geben 2 Steigungswinkel α, welche sich zu 90^0 ergänzen und welche man $45^0 + \frac{1}{2}\varphi$ und $45^0 - \frac{1}{2}\varphi$ nennen kann, dieselbe Wurfweite. Bei gleichen Anfangsgeschwindigkeiten c lässt sich also ein gegebenes Ziel sowohl durch einen hohen, wie durch einen flachen Wurf erreichen. Beide fallen aber zu einem einzigen zusammen für $\alpha = 45^0$, und dieser Steigungswinkel liefert den Grösstwerth der Wurfweite, nämlich

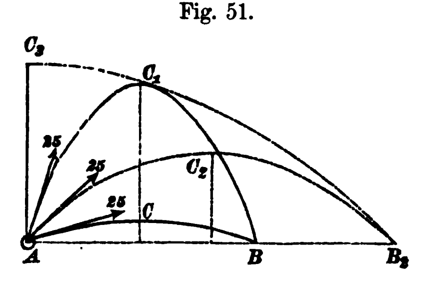
$$8) \qquad l_{max} = \frac{c^2}{g}.$$

Die grösste erreichbare Höhe entsteht bei $\alpha = 90^0$ und wird $h_{max} = \dfrac{c^2}{2g}$; die grösste Wurfweite ist mithin doppelt so gross wie die grösste Wurfhöhe.

Bei $\alpha = 45^0$ wird (nach Gl. 3) $h = \dfrac{c^2}{4g}$, d. h. die Pfeilhöhe dieser Wurflinie ist $\frac{1}{4}$ der Wurfweite (der Sehne).

Beispiel 1: Eine gespannte Armbrust (eine geladene Windbüchse, ein Blasrohr oder dergl.) ertheile dem Geschoss eine Geschwindigkeit $c = 25 \frac{m}{s}$. Mit welchem Steigungswinkel ist eine Wurfweite von $l = 40$ m zu erreichen? (Fig. 51.) Nach Gl. 6 ist $40 = \frac{25^2 \sin 2\alpha}{9{,}81}$, mithin $\sin 2\alpha = 0{,}628$; dies entspricht einem Winkel $2\alpha = 39^0$, zugleich aber auch $2\alpha = 141^0$. Also sind die beiden Steigungswinkel $\alpha = 19{,}5^0$ und $70{,}5^0$ verwendbar. Dann ist $\sin\alpha = 0{,}334$ bezw. $0{,}943$, sonach beträgt $c \sin\alpha = 8{,}4$ bezw. $23{,}6$ und die Wurfhöhe nach Gl. 3: $h = 3{,}5$ bezw. $28{,}3$ m, die Wurfdauer aber (Gl. 7): $t_2 = 1{,}7$ bezw. $4{,}81$ Sekunden. Die grösste erreichbare Höhe bei $\alpha = 90^0$ beträgt $c^2 : (2g) = 31{,}9$ m, die grösste mögliche Wurfweite bei $\alpha = 45^0$: doppelt so viel, nämlich $63{,}8$ m $= AB_2$.

Fig. 51.



Soll ein Ziel getroffen werden, welches nicht in gleicher Höhe mit A liegt, sondern die Koordinaten x und y hat, so findet man den erforderlichen Steigungswinkel, indem man Gl. 2 nach α auflöst. Führt man zur Abkürzung die Geschwindigkeitshöhe $k = \frac{c^2}{2g}$ ein, so wird Gl. 2: $y = x \operatorname{tg}\alpha - \frac{x^2}{4k\cos^2\alpha}$; bedenkt man, dass $1 : \cos^2\alpha = \sec^2\alpha = 1 + \operatorname{tg}^2\alpha$, so ergiebt sich leicht

$$10) \qquad \operatorname{tg}\alpha = \frac{2k}{x} \pm \sqrt{\frac{4k(k-y)}{x^2} - 1}\,.$$

Bei gegebenem k, d. h. gegebener Anfangsgeschwindigkeit des Geschosses giebt es bezüglich der Punkte, die für das Geschoss erreichbar sind, eine bestimmte Grenze. Für gewisse Werthpaare von x und y wird nämlich die Wurzel in Gl. 10 reell, für andere aber imaginär. Letztere Werthpaare entsprechen den unerreichbaren Punkten. Die Grenzlinie zwischen den erreichbaren und unerreichbaren Punkten erhält man, wenn die Grösse unter dem Wurzelzeichen gleich Null gesetzt wird, d. h. $4k^2 - 4ky = x^2$ oder

$$11) \qquad y = k - \frac{x^2}{4k} = \frac{c^2}{2g} - \frac{g}{2c^2}x^2.$$

Dies ist die Gleichung einer Parabel, deren Scheitel in der Höhe $k = c^2 : (2g)$ lothrecht über dem Anfangspunkte A liegt, deren halbe Sehne gleich der Wurfweite $l = 2k = c^2 : g$ ist. Sie ist in Fig. 51 durch die Strichpunktirte $C_3 B_2$ dargestellt. Giebt man α alle möglichen Werthe, so bezeichnet Gl. 2 (S. 49) eine Schar von unendlich vielen verschiedenen Wurfparabeln, die sämmtlich von A ausgehen. Umschliesst man diese unendlich vielen für eine gespannte oder geladene Wurf- oder Schiessvorrichtung möglichen Parabeln durch eine sie sämmtlich berührende Kurve, so nennt man diese die Umhüllungslinie, und die Parabel $C_3 B_2$ der Gl. 11 ist diese Umhüllungslinie.

Ihre Gleichung kann auch noch auf andere Weise, als eben geschehen, gefunden werden, indem man nach der Lehre von den Umhüllungslinien die Abgeleitete der Gleichung 2 (S. 49) der Kurvenschar nach dem für die Kurvenschar veränderlichen $\operatorname{tg}\alpha$ gleich Null setzt, diese Gleichung mit Gleichung 2 verbindet und aus beiden $\operatorname{tg}\alpha$ entfernt. Es wird Gleichung 2, wenn man darin $1 : \cos^2\alpha = 1 + \operatorname{tg}^2\alpha$ setzt:

12) $$y = x \operatorname{tg}\alpha - \frac{g x^2}{2 c^2} - \frac{g x^2}{2 c^2} \operatorname{tg}^2\alpha.$$

Daraus

13) $$\frac{dy}{d(\operatorname{tg}\alpha)} = 0 = x - \frac{g x^2}{c^2} \operatorname{tg}\alpha.$$

Hieraus $\operatorname{tg}\alpha = \frac{c^2}{g x}$ giebt in Gleichung 12 eingesetzt:

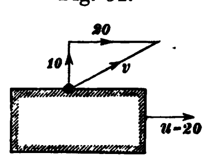
$$y = \frac{c^2}{g} - \frac{g}{2 c^2} x^2 - \frac{c^2}{2 g} \text{ oder}$$

$$y = \frac{c^2}{2 g} - \frac{g}{2 c^2} x^2, \text{ wie in Gleichung 11.}$$

Beispiel 2: Hat ein Eisenbahnwagen eine Geschwindigkeit u in gerader Bahnlinie, so nehmen alle Körper, die in demselben in scheinbarer Ruhe sich befinden, an der Geschwindigkeit u Theil. Lässt man also in einem solchen Wagen einen Massenpunkt aus der ruhenden Hand fallen, so ist seine scheinbare Bewegung freilich eine lothrechte Fallbewegung, die wahre Bewegung aber eine parabolische Wurfbewegung, die mit der wagerechten Geschwindigkeit u beginnt. Dasselbe gilt natürlich auch, wenn man einen Massenpunkt aus dem Fenster eines Eisenbahnwagens fallen lässt. Ein ausserhalb des Zuges auf dem Erdboden befindlicher Beobachter erblickt in solchem Falle eine parabolische Bahnlinie nach Fig. 49, wenn darin c mit u vertauscht wird. Für $u = 20 \frac{\text{m}}{\text{s.}}$ wird der Parameter der Parabel $20^2 : 9{,}81 = 400 \cdot 0{,}102 = 40{,}8 \,\text{m}$.

Ertheilt man aber dem Massenpunkte, statt ihn aus der ruhenden Hand vom Eisenbahnwagen aus fallen zu lassen, mittels Wurfes eine wagerechte Geschwindigkeit $w = 10 \frac{\text{m}}{\text{s.}}$ rechtwinklig zur Fahrrichtung (Fig. 52, Grundriss), so ist diese nur eine Seitengeschwindigkeit; die wahre Geschwindigkeit v aber in Bezug auf den festen Erdboden ist die Mittelgeschwindigkeit aus $w = 10$ und $u = 20$, mithin

Fig. 52.



$$v = \sqrt{w^2 + u^2} = 10 \sqrt{5} = 22{,}361.$$

Für den aussen stehenden Beobachter entsteht eine Wurfbewegung, die mit der wagerechten Geschwindigkeit $c = 10 \sqrt{5}$ beginnt und in der lothrechten Ebene durch v erfolgt. Würde der Beobachter von diesem Wurfe etwa getroffen, so würde, wenn man nur die wagerechte Seitenbewegung berücksichtigt und die Vergrösserung der wahren Geschwindigkeit in schräger Richtung durch die Wirkung der Schwere ausser Acht lässt, die Wirkung des Wurfes nach dem Arbeitsvermögen $\frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m \cdot 10^2 \cdot 5$ zu

beurtheilen sein. Der Werfende hat nur die Arbeit $\frac{1}{2} m\, 10^2$ auf den Massenpunkt übertragen; die durch die Kraft der Lokomotive erzeugte Zuggeschwindigkeit hat aber zur Folge, dass das Arbeitsvermögen (oder die Gewalt, die Wucht) des Wurfes auf das 5fache gewachsen ist. Die aufgewendete Wurfgeschwindigkeit w entsprach nur einer Fallhöhe $w^2 : 2g = 5{,}1$ m, während die Wirkung dieselbe ist, als fiele der Punkt aus der Höhe $5 \cdot 5{,}1 = 25{,}5$ m. Hiernach kann man beurtheilen, wie gefährlich das Hinauswerfen fester Körper aus fahrenden Eisenbahnzügen werden kann.

Bei den bisherigen Untersuchungen über Fall- und Wurfbewegungen wurde vorausgesetzt, dass auf den Massenpunkt allein die Schwere einwirke. Auf S. 37 wurde aber schon bemerkt, dass bei Körpern von verhältnismässig grossem Rauminhalt und bei grossen Geschwindigkeiten der Luftwiderstand eine bedeutende Rolle spielt. Es sei hier nur bemerkt, dass ein Gewehrgeschoss schon bei etwa 50 $\frac{\text{m}}{\text{s.}}$ Geschwindigkeit einen Luftwiderstand erfährt, der gleich dem Gewichte des Geschosses, sodass ein mit dieser Geschwindigkeit abwärts geworfenes Geschoss sich gleichförmig bewegen würde, da der Luftwiderstand die Schwere aufhebt. Weil der Luftwiderstand aber etwa verhältnisgleich dem Quadrate der Geschwindigkeit wächst, so wird er bei einer Schussgeschwindigkeit von 400 $\frac{\text{m}}{\text{s.}}$ das 64fache des Gewichts betragen. Hieraus ergiebt sich klar, dass die Bewegung eines solchen Geschosses mit den hier entwickelten Formeln wenig Ähnlichkeit haben wird. Aus diesem Grunde haben wir auch in dem Beispiele auf S. 52 nicht ein Gewehrgeschoss, sondern ein Geschoss mit geringerer Geschwindigkeit der Rechnung unterzogen.

Ferner wurde bisher die Fallbeschleunigung als gleichbleibend nach Grösse und Richtung vorausgesetzt. Im Folgenden soll untersucht werden, wie sich die Fallbeschleunigung mit der Veränderung des Ortes ändert, woraus sich dann freilich zeigen wird, dass dieser Einfluss bei den vorkommenden Fällen der Wurfbewegung verschwindend klein ist.

10. Gesetz der allgemeinen Massenanziehung.

Das Gesetz der Schwere (S. 33) ist nur ein besonderer Fall des Gesetzes der allgemeinen Massenanziehung, welches von Newton 1685 aufgestellt wurde. Dasselbe lautet:

Je 2 Massenpunkte m und m_1, die sich in der Entfernung l von einander befinden, üben auf einander eine gegenseitige Anziehungskraft aus, die proportional dem Produkte der Massen und umgekehrt proportional dem Quadrate ihrer Entfernung ist.

Fig. 51.

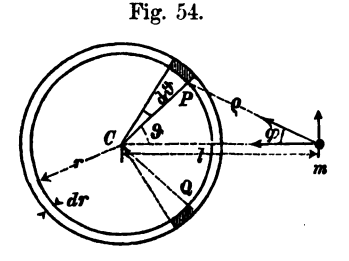
Es ist hiernach (Fig. 53)

1) $$K = k \frac{m\, m_1}{l^2},$$

worin k offenbar die Anziehungskraft zwischen 2 Masseneinheiten in dem Abstande $l = 1$ bedeutet. Für Kilogramme als Kräfte, für Meter und Sekunden ist $k = 0{,}000\,000\,000\,64 = \frac{64}{10^{11}}$.

Diese Formel 1 gilt einstweilen nur für Massenpunkte ohne räumliche Ausdehnung; wir wollen darnach feststellen, wie eine dünne gleichartige Kugelschale auf einen Massenpunkt einwirkt. Die Kugelschale (Fig. 54) habe den Halbmesser r, die Wandstärke dr; der Massenpunkt m sei vom Mittelpunkte der Kugel um l entfernt. Man ziehe einen Halbmesser CP, der mit Cm den Winkel ϑ einschliesst und ziehe in dem Abstande $d\vartheta$ einen zweiten Halbmesser. Beide lasse man sich um Cm als Achse drehen, dann schneiden sie aus der Hohlkugel eine kleine Zone heraus. Von der Umfangslänge der Zone denkt man sich bei P ein Bogentheilchen ds rechtwinklig zur Bildebene herausgenommen, dann hat man bei P ein Massentheilchen, welches nach allen drei Richtungen unendlich klein ist. Der Stoff der Hohlkugel habe für 1 cbm das Gewicht γ (unter 45° geographischer Breite gewogen). Das Gewicht eines Kubikmeters in Kilogrammen (unter 45° geogr. Br.) nennen wir die **Dichte** des Körpers. Das Körpertheilchen hat dann die Masse $\frac{\gamma}{g} \cdot dr \cdot r d\vartheta \cdot ds$ und übt auf m die Anziehungskraft aus $k \cdot \frac{\gamma}{g} \cdot dr \cdot r d\vartheta \cdot ds \cdot \frac{m}{\rho^2}$. Diese Kraft kann zerlegt werden in eine mit der Richtung mC und eine, welche im Punkte m rechtwinklig zu mC nach oben gerichtet ist. Die erstere beträgt

Fig. 54.



$$k\, \frac{\gamma}{g} \cdot dr \cdot r d\vartheta \cdot ds \cdot \frac{m}{\rho^2} \cos\varphi,$$

während die zweite durch die Einwirkung eines gleichen bei Q befindlichen Massentheilchens aufgehoben wird. Sämmtliche Massentheilchen der Zone wirken in übereinstimmender Weise auf m ein, da für sie alle $d\vartheta$, ρ und φ dieselben sind. Wir können daher die Gesammtanziehung der ganzen Kugelzone erhalten, wenn wir statt ds den Umfang $2\pi r \sin\vartheta$ einsetzen. Dann entsteht die Anziehung

$$dK = k \cdot \frac{\gamma}{g} \cdot dr \cdot r d\vartheta \cdot 2\pi r \cdot \sin\vartheta \cdot \frac{m}{\rho^2} \cdot \cos\varphi.$$

Nun ist aber die Masse der ganzen Hohlkugel $M = \frac{\gamma}{g} 4 r^2 \pi\, dr$; wird dies in dK eingeführt, so entsteht

1) $$dK = \frac{k M m}{2} \, \frac{\sin\vartheta\, d\vartheta \cos\varphi}{\rho^2}.$$

Die Veränderlichen ϑ und φ sollen auf ρ zurückgeführt werden. Es ist nämlich in dem Dreiecke CPm: $r^2 = l^2 + \rho^2 - 2l\rho\cos\varphi$ mithin $\cos\varphi = \frac{l^2 - r^2 + \rho^2}{2l\rho}$; ebenso $\cos\vartheta = \frac{l^2 + r^2 - \rho^2}{2lr}$ und durch Differentiation $-\sin\vartheta\, d\vartheta = -\frac{\rho\, d\rho}{lr}$. Hiernach wird

2) $$dK = \frac{kMm}{2}\,\frac{l^2 - r^2 + \rho^2}{2l^2 r\rho^2}\,d\rho = \frac{kMm}{4rl^2}\,\frac{l^2 - r^2 + \rho^2}{\rho^2}\,d\rho.$$

Um nun die Anziehungskraft K der ganzen Hohlkugel zu erhalten, muss man vorstehenden Ausdruck integriren. Liegt der Punkt m ausserhalb der Hohlkugel, so sind ihre nächsten Theile im Abstande $l - r$, die fernsten im Abstande $l + r$ vom Massenpunkte, sodass diese Werthe als Grenzen für ρ einzusetzen sind. Daher wird

$$K = \frac{kMm}{4rl^2}\int_{l-r}^{l+r}\left[(l^2 - r^2)\frac{d\rho}{\rho^2} + d\rho\right].$$

Das unbestimmte Integral aber ist

3) $$\int\left[(l^2 - r^2)\frac{d\rho}{\rho^2} + d\rho = -\frac{l^2 - r^2}{\rho} + \rho\right].$$

Dies wird mit Rücksicht auf obige Grenzen

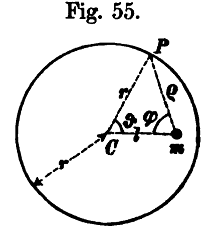
$$-\frac{l^2 - r^2}{l + r} + l + r + \frac{l^2 - r^2}{l - r} - (l - r) = -(l - r) + l + r + l + r - (l - r) = 4r,$$

mithin wird

4) $$K = k\frac{Mm}{l^2}.$$

Diese Anziehungskraft ist (nach Gl. 1) dieselbe, als ob die Masse M der Kugelschale in ihrem Mittelpunkte vereinigt wäre. Hieraus folgt weiter, dass eine Hohlkugel von endlicher Wandstärke oder auch eine Vollkugel, die aus lauter gleichartigen Kugelschalen besteht, bezüglich der Anziehungskraft gegen einen ausserhalb befindlichen Massenpunkt ebenso wirkt, als ob die ganze Masse der Hohlkugel oder Kugel in ihrem Mittelpunkte vereinigt wäre. Dabei ist nicht erforderlich, dass die verschiedenen Kugelschalen dieselbe Dichte haben, wenn nur jede Schale für sich gleichartig an Dichte ist. Auch für die gegenseitige Anziehungskraft zweier Kugeln ergiebt sich leicht, dass man die Masse einer jeden in ihrem Mittelpunkte vereinigt ansehen kann.

Fig. 55.



Liegt der Massenpunkt im Innern der Kugelschale (Fig. 55), so ergiebt sich für die Anziehung einer Zone bei P dieselbe Gleichung 1, daher auch dieselbe Gleichung 2; nur sind jetzt die Grenzen $r + l$ und $r - l$ als grösste und kleinste Entfernung des Massenpunktes von der Schale. Die Einsetzung dieser Grenzen in Gl. 3 giebt: $-\frac{l^2 - r^2}{r + l} + r + l + \frac{l^2 - r^2}{r - l} - (r - l)$ $= r - l + r + l - r - l - r + l = 0$, so dass auch $K = 0$ wird. Die Anziehungskraft einer dünnen, gleichartigen

Kugelschale gegen einen in ihrem Inneren befindlichen Punkt ist also Null.

Die Anziehung einer aus gleichartigen dünnen Kugelschalen bestehenden Hohlkugel von endlicher Wandstärke auf einen in ihrem Innern gelegenen Punkt ist demnach ebenfalls Null.

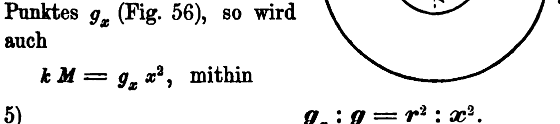
Betrachten wir nun die Erde als Kugel aus unendlich vielen Schalen bestehend, von denen jede für sich gleichartig ist, so ist ihre Anziehungskraft für einen ausserhalb gelegenen Massenpunkt m ebenso zu berechnen, als ob ihre ganze Masse im Mittelpunkte vereinigt wäre. Für einen Massenpunkt an der Erdoberfläche, d. h. in dem Abstande r (Erdhalbmesser) vom Mittelpunkt M ist nun die Anziehungskraft gleich mg, mithin

$$\frac{k M m}{r^2} = m g \quad \text{oder}$$

4) $$k M = g r^2 .$$

Fig. 56.

Nennen wir aber die Anziehungsbeschleunigung (Fallbeschleunigung) eines in grösserem Abstande x vom Erdmittelpunkte befindlichen Punktes g_x (Fig. 56), so wird auch



$$k M = g_x x^2, \quad \text{mithin}$$

5) $$g_x : g = r^2 : x^2 .$$

Die Darstellung dieser Gleichung ist eine Kurve BQ, welche, nach beiden Seiten verlängert gedacht, sich ähnlich wie eine gleichseitige Hyperbel beiden Achsen asymptotisch nähert, jedoch keine Symmetrieachse hat. (Kämen auf der rechten Seite der Gl. 5 die ersten Potenzen statt der Quadrate vor, so würde eine Hyperbel die Darstellung sein.) Für $x = 2r$ und $3r$ ist g_x nur noch $1/4\, g$ bezw. $1/9\, g$.

Für die Veränderlichkeit der Fallbeschleunigung im Inneren der Erde wäre das Gesetz einfach, wenn man annehmen dürfte, dass die Dichte der Erde überall gleich sei. Unter dieser Voraussetzung würde man für ein Massentheilchen im Abstande x von dem Mittelpunkte die Erde zerlegen in eine Vollkugel vom Halbmesser x und eine äussere Hohlkugel von der Wandstärke $r - x$. Letztere würde keine Einwirkung ausüben, erstere aber ebenso wirken, als ob ihre Masse in der Mitte vereinigt wäre. Darnach wird nach Gl. 4:

$$k M_x = g_x x^2 ,$$

wenn M_x die Masse der Kugel vom Halbmesser x. Da nun für $x = r$ wiederum

$$k M = g r^2 , \quad \text{so wird}$$

6) $$g_x = g \frac{r^2}{x^2} \frac{M_x}{M} \quad \text{oder, weil}$$

$M_x : M = x^3 : r^3$:

7) $$g_x = g\,\frac{x}{r},$$

dargestellt durch eine in Fig. 56 gezogene Gerade MB. Die Erde ist aber durchaus nicht von überall gleicher Dichte, vielmehr sind die tieferen Schichten bedeutend dichter als die uns bekannten, in der Nähe der Oberfläche gelegenen. Daher ist $M_x : M > x^3 : r^3$ und es wird $g_x > g\,{}^x/_r$. Statt der Geraden MB ist daher eine oberhalb derselben liegende Kurve MB der wahre Ausdruck des Gesetzes, welches wir aber nicht entwickeln können, da wir das Gesetz der Veränderlichkeit der Dichte nicht kennen.

Nehmen wir nun an, dass die dem Menschen zugänglichen oder auch durch Wurf zu erreichenden Höhen sich um höchstens 10000 m über die mittlere Erdoberfläche erheben, so würde, weil der mittlere Erdhalbmesser etwa 6370000 m beträgt, für diese Grenze $x = 6380000$ m betragen, daher nach Gl. 5:

$$g_x : g = 637^2 : 638^2,$$

dies ist etwa $= 1000 : 1003$, d. h. sehr wenig von der Einheit abweichend. Nennt man h die Höhe eines Punktes über der Meeresfläche, so ist

$$\frac{g_x}{g} = \frac{r^2}{(r+h)^2} = \frac{1}{\left(1+\frac{h}{r}\right)^2} = \frac{\left(1-\frac{h}{r}\right)^2}{\left[1-\left(\frac{h}{r}\right)^2\right]^2} = \frac{1-2\frac{h}{r}+\left(\frac{h}{r}\right)^2}{1-2\left(\frac{h}{r}\right)^2+\left(\frac{h}{r}\right)^4}.$$

Wenn man dann $\left(\frac{h}{r}\right)^2$ und $\left(\frac{h}{r}\right)^4$ gegen 1 vernachlässigt, so entsteht annähernd

8) $$g_x = g\left(1-2\,\frac{h}{r}\right).$$

Für die weitaus meisten technischen Anwendungen kann diese Veränderlichkeit von g_x mit der Höhe vernachlässigt werden.

Die Erde übt nun aber auch auf den Mond eine Anziehungskraft aus, und die dieser Kraft entsprechende Beschleunigung g_x ergiebt sich, da die Entfernung des Mondes von dem Erdmittelpunkte etwa 60 Erdhalbmesser ausmacht, zu

$$g_x = g\left(\frac{r}{60\cdot r}\right)^2 = {}^1/_{3600}\,g = 9{,}81 : 3600 = 0{,}0027.$$

Hörte die Umlaufbewegung des Mondes um die Erde für einen Augenblick auf, so würde der Mond eine beschleunigte Fallbewegung

nach der Erde hin ausführen; die Beschleunigung würde anfänglich nur 0,0027 $^m/_{s.^2}$ betragen, würde aber mit der Annäherung an die Erde wachsen und sich allmählich dem Werthe 9,81 nähern. Dass diese Fallbewegung nicht zu Stande kommt, rührt von der Geschwindigkeit des Mondes rechtwinklig zur Richtung der Anziehungskraft her, wie weiter unten noch besprochen werden wird.

Die Gl. 4 (S. 57) kann auch dazu dienen, die **Massenzahl M der Erde** zu bestimmen. Es ist $M = gr^2 : k$ also $M = 9{,}81 \cdot 6\,370\,000^2 \cdot 10^{11} : 64 = 622 \cdot 10^{21}$ Masseneinheiten. Die Erde hat etwa $1083 \cdot 10^{18}$ Kubikmeter Inhalt; bestände sie aus Wasser (von 4° C.), so würde ihr Massengehalt $1083 \cdot 10^{18} \cdot 1000 : 9{,}81 = 110 \cdot 10^{21}$ Masseneinheiten.

Mithin ist die Erde durchschnittlich $622 : 110 = 5{,}65$ mal dichter als Wasser.

Fallbeschleunigung an der Oberfläche anderer Himmelskörper. Die Gleichung 4, S. 57, für die Fallbeschleunigung g an der Erdoberfläche

$$g = M k : r^2$$

gilt, ihrer Entwickelung nach, allgemein für die Fallbeschleunigung an der Oberfläche eines beliebigen Himmelskörpers von der Masse M und dem Halbmesser r. Gehen M und r in M_1 und r_1 über, so wird

$$g_1 = M_1 k : r_1^2 ,$$

mithin ist das Verhältnis

$$\frac{g_1}{g} = \frac{M_1}{M} \frac{r^2}{r_1^2} .$$

Ist die Masse der Sonne 355 000 mal so gross wie die der Erde, während die Halbmesser in dem Verhältnisse 109 : 1 stehen, so wird das Verhältnis der Fallbeschleunigungen

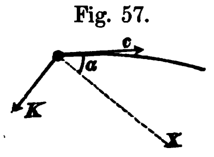
$$g_1 : g = 355\,000 : 109^2 = \text{rund } 30 .$$

An der Oberfläche der Sonne beträgt also die Fallbeschleunigung ungefähr $294{,}3 \frac{m}{s.^2}$; an der Oberfläche des Mondes etwa nur $^1/_6 \cdot 9{,}81 = 1{,}64 \frac{m}{s.^2}$.

11. Parabolische Bewegung im Allgemeinen.

Die alleinige Einwirkung der als gleichbleibend betrachteten Schwere bewirkte eine Bewegung des Massenpunktes in einer Parabel, deren Achse lothrecht abwärts, d. h. übereinstimmend mit der Kraft, gerichtet, deren Parameter $c^2 \cos^2 \alpha : g$ betrug.

Fig. 57.



Wirken nun auf den Massenpunkt beliebig viele nach Grösse und Richtung gleichbleibende Kräfte, so können diese zu einer ebenfalls gleichbleibenden Mittelkraft K zusammengesetzt werden. Wählt man die Kraftrichtung dann zur negativen y-Richtung, die x-Achse rechtwinklig dazu in der durch K und die Anfangsgeschwindigkeit c bestimmten Ebene, so ist wiederum (Fig. 57) $c \cos \alpha$

die gleichbleibende Geschwindigkeit v_x, während in der y-Richtung die gesammte Verzögerung $K : m$ auftritt. Es entstehen daraus die Seitenbewegungen

$$x = c \cos \alpha \, t;$$

$$y = c \sin \alpha \, t - \frac{K}{m} \frac{t^2}{2}, \text{ und aus beiden}$$

$$y = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{K}{m} \frac{x^2}{2 c^2 \cos^2 \alpha}.$$

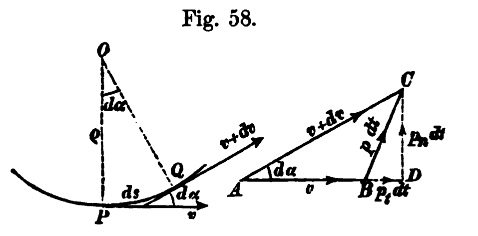
Die Verhältnisse sind also gerade so wie bei der Wurfbewegung; statt der lothrechten Richtung kommt aber hier die Richtung der Mittelkraft, statt der Fallbeschleunigung g der Werth $K : m$ in Frage. Es folgt hieraus: Ein Massenpunkt bewegt sich unter Einwirkung gleichbleibender Kräfte in einer Parabel, deren Achse mit der Mittelkraft K aller wirkenden Kräfte gleichgerichtet, deren Parameter $= \frac{m c^2 \cos^2 \alpha}{K}$ ist.

12. Tangential- und Normalbeschleunigung.

Nach S. 31 ist zu jeder Änderung der Geschwindigkeit, sowohl der Grösse, wie der Richtung nach, eine Kraft erforderlich. Es soll nun für eine gegebene, ungleichförmige und krummlinige Bewegung die zur Grössen- bezw. zur Richtungsänderung aufzuwendende Kraft bestimmt werden.

In der gegebenen Bahnlinie (Fig. 58) bewege sich der Massenpunkt in einem Augenblicke mit der Geschwindigkeit v, beschreibe während des nächsten Zeittheilchens dt das Bahntheilchen $PQ = ds$; dann hat die Geschwindigkeit eine Richtungsänderung um den Winkel $d\alpha$ erfahren, während ihre Grösse $v + dv$ geworden sein möge. Trägt man dann von einem Punkte A aus v und $v + dv$ als Strecken auf, so ist deren geometrische Differenz BC die Elementarbeschleunigung $p\,dt$ (vgl. S. 24). Zeichnet man noch das bei D rechtwinklige Dreieck BDC, so ist $p\,dt$ die geometrische Summe von BD und DC. Die wahre Beschleunigung p der krummlinigen Bewegung hat die Richtung BC und lässt sich zerlegen in eine Seitenbeschleunigung in der Richtung der Bewegung, oder der Tangente an die Bahnlinie, die sogenannte

Fig. 58.



Tangentialbeschleunigung p_t und eine dazu rechtwinklige, in die Richtung der Normalen PO fallende, die sog. Normalbeschleunigung p_n. Danach sind dann $BD = p_t dt$ und $DC = p_n dt$ die entsprechenden Elementarbeschleunigungen. Nach der Figur ist aber $p_t dt = (v + dv) \cos da - v$ oder, weil $\cos da = 1$ zu setzen, $p_t dt = v + dv - v = dv$, mithin

$$p_t = dv : dt. \tag{1}$$

Ferner ist $p_n dt = (v + dv) \sin da$ oder, weil $\sin da = da$ und $dv \cdot da$ als unendlich klein höherer Ordnung gegen $v da$ zu vernachlässigen, $p_n dt = v da$. Weil aber $PQ = ds = v dt = \varrho da$ oder $da = v dt : \varrho$, so wird $v da = v^2 dt : \varrho$ oder

$$p_n = \frac{v^2}{\varrho}. \tag{2}$$

Ist die Bahnlinie eine ebene Kurve, so liegen beide Beschleunigungen p_t und p_n in der Ebene der Kurve, und ϱ ist der Krümmungshalbmesser. Ist die Bahnlinie aber doppelt gekrümmt, so bestimmen die an die beiden unendlich nahen Punkte gezogenen Tangenten v und $v + dv$ die sog. Krümmungsebene; in dieser liegt dann die Figur $ABDC$, somit auch die Beschleunigungen p, p_t und p_n. O ist dann der Schnittpunkt der in der Krümmungsebene liegenden beiden Normalen PO und QO an die Kurve, der sog. Hauptnormalen, deren als gleich zu betrachtende Länge ϱ der erste Krümmungshalbmesser genannt wird.

Die Tangentialbeschleunigung $p_t = dv : dt$ stellt allein die Grössenänderung der Geschwindigkeit dar, die Normalbeschleunigung dagegen, welche mit $1 : \varrho$, d. h. mit der Krümmung der Bahnlinie verhältnisgleich wächst, vertritt die Richtungsänderung. Die Normalbeschleunigung heisst auch Centripetalbeschleunigung, weil ihr Sinn stets nach dem ersten Krümmungsmittelpunkte gerichtet ist. Die wahre Beschleunigung ist die geometrische Summe der beiden berechneten Beschleunigungen, steht somit nach Grösse, Richtung und Sinn fest. Die Gesammtbeschleunigung p kann nur dann mit p_t zusammen, also in die Richtung der Bewegung fallen, wenn $p_n = 0$, d. h. wenn $\varrho = \infty$, die Bahnlinie an der betreffenden Stelle in der Krümmungsebene ohne Krümmung ist. Es fällt p mit p_n zusammen, wenn $p_t = dv : dt = 0$, d. h. wenn die krummlinige Bewegung gleichförmig erfolgt.

Werden die Beschleunigungen mit der Masse m des Punktes multiplicirt, so erhält man die entsprechenden Kräfte. Zur Grössenänderung der Geschwindigkeit ist hiernach eine tangential gerichtete Kraft $K_t = m\,dv : dt$, zur Richtungsänderung eine nach dem (ersten) Krümmungsmittelpunkte gerichtete Centripetalkraft $K_n = m v^2 : \varrho$ erforderlich.

Wirkt auf einen Massenpunkt eine Kraft, die stets normal zur Bahnlinie gerichtet ist, so entsteht nur eine Normalbeschleunigung, also eine gleichförmige krummlinige Bewegung, was übrigens auch schon daraus folgt, dass eine Kraft von solcher Richtung keine Arbeit verrichtet, mithin auch keine Änderung des Arbeitsvermögens hervorbringen kann. Die Wirkung einer solchen Kraft besteht lediglich in einer Richtungsänderung der Geschwindigkeit.

Beispiel: Astronomischen Beobachtungen zufolge ist die Bewegung des Mondes um die Erde nahezu eine gleichförmige Bewegung mit der Geschwindigkeit $v = 1020$ m/s. in einem Kreise, dessen Halbmesser etwa 60 Erdhalbmessern gleich ist (vgl. S. 58). Die Beschleunigung des Mondes, wenn man denselben als Massenpunkt auffasst, besteht daher in einer stets nach dem Mittelpunkte der Erde gerichteten Beschleunigung $\frac{v^2}{r} = \frac{1020^2}{60 \cdot 6\,370\,000} = 0{,}0027 \frac{\text{m}}{\text{s.}^2}$. Der Umstand, dass diese Beschleunigung und die Fallbeschleunigung an der Erdoberfläche sich wie 1 zu $3600 = 1 : 60^2$, mithin umgekehrt wie die Quadrate der Abstände von dem Erdmittelpunkte verhalten (s. S. 58), hat Newton zuerst veranlasst, die Anziehungskraft zwischen zwei Massenpunkten als umgekehrt verhältnisgleich dem Quadrate ihrer Entfernung anzunehmen, welche Annahme dann, nachdem sie sich auch für die Planeten als zutreffend erwiesen hatte, zu dem allgemeinen Gesetze der Massenanziehung (S. 55) führte.

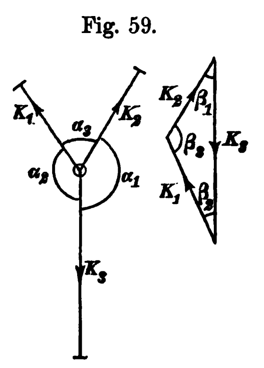
13. Gleichgewicht eines Massenpunktes.

Liefern die auf einen Massenpunkt wirkenden Kräfte eine Mittelkraft $R = 0$, so bewegt sich der Punkt gerade so, als ob gar keine Kraft auf ihn wirkte; seine Geschwinigkeit erfährt dann weder nach Grösse noch nach Richtung eine Änderung, er bewegt sich geradlinig und gleichförmig, und man sagt, die Kräfte halten sich an dem Massenpunkte im Gleichgewichte (vergl. S. 39). Ein besonderer Fall einer solchen Bewegung ist der Ruhezustand, in welchem nicht allein die Beschleunigung Null ist, sondern auch die Geschwindigkeit.

Halten beliebig viele Kräfte an einem Massenpunkte einander das Gleichgewicht, so ist jede derselben der Mittelkraft aller übrigen gleich und entgegengesetzt; denn sie hebt in diesem Falle jene Mittelkraft auf, somit auch die Wirkung aller derjenigen Kräfte, die durch diese Mittelkraft ersetzt wurden.

Sollen 3 Kräfte K_1, K_2 und K_3 an einem Punkte im Gleichgewicht sein, so muss die Mittelkraft von irgend zweien dieser Kräfte durch die dritte aufgehoben werden. Da aber (nach S. 38) die Mittelkraft zweier Kräfte mit beiden in derselben Ebene liegt, so müssen für den Gleichgewichtszustand **die Richtungen der 3 Kräfte in derselben Ebene liegen.** Bezeichnet man noch die den Kräften gegenüber liegenden Richtungswinkel mit α_1, α_2 und α_3 (Fig. 59) und bedenkt, dass nach S. 41 der Streckenzug der drei Kräfte ein geschlossenes Dreieck bilden muss, so lässt sich aus diesem das Verhältnis der drei Kräfte berechnen. Man erkennt leicht, dass die Dreieckswinkel β die Nebenwinkel der den Kräften gegenüber liegenden Richtungswinkel α sind. Die Sinus der Winkel β sind daher gleich den Sinus der entsprechenden Winkel α. Man erhält daher aus

Fig. 59.



$$K_1 : K_2 : K_3 = \sin \beta_1 : \sin \beta_2 : \sin \beta_3$$

die Gleichung

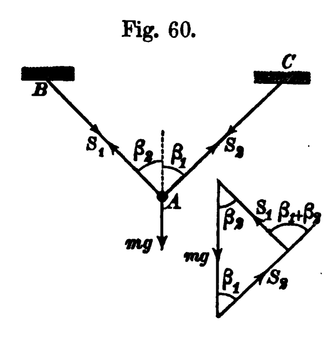
$$K_1 : K_2 : K_3 = \sin \alpha_1 : \sin \alpha_2 : \sin \alpha_3 .$$

Die Grössen von drei an einem Massenpunkte sich im Gleichgewichte haltenden Kräften verhalten sich wie die Sinus der gegenüber liegenden Richtungswinkel. Aus der Figur folgt sofort: **Fallen von den drei Kräften zwei in dieselbe Richtungslinie, so muss die dritte Null sein, wenn sie nicht ebenfalls in derselben Geraden liegt.**

Beispiel: Ein Massenpunkt sei an zwei Fäden AB und AC aufgehangen (Fig. 60) und befinde sich in Ruhe, es sollen die in den Fäden herrschenden Spannkräfte S_1 und S_2 ermittelt werden.

Die Spannkraft der Fäden, die wir einstweilen als gewichtlos, aber vollkommen biegsam und undehnbar voraussetzen, fällt mit den Richtungen der Fäden zusammen. Dies Zusammenfallen ist eben der Begriff der Biegsamkeit. Durch die Lage der Befestigungspunkte B und C, sowie durch die Fadenlängen liegt das Dreieck BAC fest. Auf den Massenpunkt wirkt die Schwere mg; dann müssen die Strecken mg, S_1 und S_2 ein geschlossenes Dreieck bilden, mithin, weil mg lothrecht, in einer lothrechten Ebene liegen. Es ist also Gleichgewicht nur möglich, wenn der Massenpunkt sich in der durch B und C gelegten lothrechten Ebene befindet. (Andernfalls wird der Punkt an den Fäden als ein Pendel so lange schwingen, bis in Folge von Luft- und anderen Widerständen endlich in lothrechter Ebene Ruhe eintritt.) Schliessen BA und CA mit der Lothrechten die spitzen Winkel β_2 und β_1 ein, so wird aus dem Krafteck

Fig. 60.



$$S_1 : S_2 : mg = \sin \beta_1 : \sin \beta_2 : \sin (\beta_1 + \beta_2).$$

Ist z. B. $mg = 10^{\text{kg}}$, $\beta_1 = \beta_2 = 45^0$, so wird aus der Figur

$$S_1 : S_2 = 10 \cdot \sqrt{1/2} = 7{,}07^{\text{kg}}.$$

Zu beliebig vielen Kräften K_1, K_2, . . . K_n, welche nicht in derselben Ebene liegen, wurde (auf S. 40) die Mittelkraft in der Form

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} \text{ gefunden,}$$

worin $X = \Sigma K \cos \alpha$; $Y = \Sigma K \cos \beta$; $Z = \Sigma K \cos \gamma$ bedeuten. Soll nun Gleichgewicht herrschen, so muss $R = 0$, also auch $X^2 + Y^2 + Z^2 = 0$ werden; da nun die Kräfte, somit auch X, Y und Z stets reelle Grössen (wodurch negative Werthe der Quadrate ausgeschlossen sind), so muss jeder der Summanden gleichzeitig Null sein, oder es muss stattfinden:

$$\Sigma K \cos \alpha = 0; \; \Sigma K \cos \beta = 0; \; \Sigma K \cos \gamma = 0.$$

Also: **An einem Massenpunkte halten sich beliebig viele Kräfte im Gleichgewichte, wenn in Bezug auf ein beliebiges rechtwinkliges Achsenkreuz die algebraische Summe der bei rechtwinkliger Zerlegung in jede Achsenrichtung fallenden Seitenkräfte gleich Null ist.**

Da die Mittelkraft gegebener Kräfte (nach S. 41) auch durch die Schlusslinie eines ebenen oder räumlichen Kraftecks gefunden wird, so ist klar, dass die Schlussseite Null werden muss, wenn die

Kräfte im Gleichgewicht sein sollen. Im Gleichgewichts-Zustande müssen also die Kräfte ein geschlossenes Krafteck bilden.

Liegen die Kräfte in einer gemeinsamen Ebene, so legt man zweckmässig auch die x- und y-Achse in diese Ebene. Dann werden die Neigungswinkel γ gegen die z-Achse sämmtlich zu 90^0 und $K \cos \gamma$ durchweg Null. Ausserdem wird dann $\cos \beta = \sin \alpha$ und die Gleichgewichts-Bedingungen beschränken sich auf

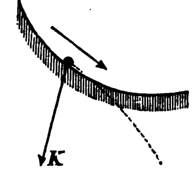
$$\Sigma K \cos \alpha = 0 \text{ und } \Sigma K \sin \alpha = 0.$$

Liegen die x- und y-Achse bezw. wagerecht und lothrecht, so sagt man auch: Die Summe aller wagerechten Seitenkräfte muss Null sein und die Summe aller lothrechten Seitenkräfte ebenfalls.

14. Bewegung auf vorgeschriebener Bahn.

Wirkt auf einen Massenpunkt eine gegebene Kraft K ein, so wird er bei gegebener Anfangsgeschwindigkeit c eine bestimmte Bewegung ausführen müssen, die z. B. parabolisch ist, wenn K gleichbleibend nach Grösse und Richtung.

Fig. 61.



Ist aber der Punkt nicht völlig frei, sondern in Berührung mit der Oberfläche eines unbeweglichen festen Körpers (Fig. 61), welcher derartig geformt ist, dass er den Massenpunkt verhindert, sich so (in der punktirten Bahn) zu bewegen, wie es unter alleiniger Wirkung von K geschehen müsste, so übt die feste Oberfläche einen Einfluss auf die Bewegung des Massenpunktes aus, und einen solchen Einfluss haben wir (nach S. 31) als eine Kraft aufzufassen, welche als zweite Kraft zu K hinzutritt und ihrer Grösse nach von K in gewisser Weise abhängig ist.

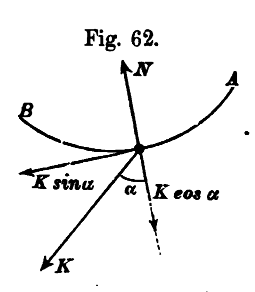
Wir benutzen den Erfahrungssatz: Vollkommen glatte Körper, die sich ohne ein Bindemittel berühren, können an jeder Berührungsstelle nur einen gegenseitigen Druck, dessen Richtung rechtwinklig zur Berührungsebene steht, also einen gegenseitigen Normaldruck, auf einander ausüben. Völlig glatte Körper giebt es freilich nicht; obiger Satz trifft aber um so mehr zu, je grösser der Grad

der Glätte wird, und umgekehrt. Die bezeichnete Kraft heisst der Normalwiderstand der vorgeschriebenen Fläche und wird mit N bezeichnet.

Noch enger beschränkt ist die Bewegung des Massenpunktes, wenn ihm eine bestimmte Linie als Bahn vorgeschrieben wird, z. B. durch eine Röhre, welche den als Massenpunkt gedachten Körper derartig umschliesst, dass er sich nur längs der Mittellinie der Röhre bewegen kann, oder durch einen steifen glatten Draht, auf dem der Massenpunkt mittels einer Bohrung geführt wird. Beide Vorrichtungen sind geeignet, nach allen Richtungen innerhalb einer Normalebene zur vorgeschriebenen Bahnlinie den Widerstand N zu leisten. Diese Kraft N tritt stets mit derjenigen Richtung und Grösse auf, die erforderlich sind, um den Massenpunkt an dem Verlassen der vorgeschriebenen Bahnlinie zu hindern. N ist hiernach eine bedingte oder eine Bedingungskraft.

Der Normalwiderstand N kann bestimmt werden mit Hülfe der Formel für die Centripetalbeschleunigung (S. 61).

Fig. 62.



Ein Punkt bewege sich auf der vorgeschriebenen ebenen Bahnlinie (Fig. 62) von A nach B unter Einwirkung einer gegebenen, in der Ebene der Kurve liegenden Kraft K, zu der die unbekannte Kraft N hinzutritt, Ob man N anfänglich nach innen oder nach aussen gerichtet annimmt, ist grundsätzlich gleichgültig. Ist das Endergebnis positiv, so war der angenommene Sinn richtig, andernfalls ist er umzukehren. Schliesst K mit der Normalen den Winkel α ein, so zerlegt man K in $K \sin \alpha$ (in der Bewegungsrichtung) und $K \cos \alpha$ rechtwinklig dazu. Dann wird $K \sin \alpha$ als einzige Tangentialkraft die Tangentialbeschleunigung erzeugen; so dass $dv : dt = K \sin \alpha : m$ wird. In der Richtung nach dem Krümmungsmittelpunkt ergiebt sich als Gesammtkraft $N - K \cos \alpha$. Diese muss die Centripetalbeschleunigung hervorbringen, daher ist

1) $$\frac{v^2}{\varrho} = \frac{N - K \cos \alpha}{m} \text{ oder}$$

2) $$N = \frac{m v^2}{\varrho} + K \cos \alpha .$$

Ist K so gerichtet, dass die Pfeilspitze von $K \cos \alpha$ nach dem Krümmungsmittelpunkte hinweist, so wird

3) $$N = \frac{m v^2}{\varrho} - K \cos \alpha.$$

Dem Anfänger ist dringend zu empfehlen, in jedem vorliegenden Falle dieser Art die Gleichung 1 für die Centripetalbeschleunigung anzusetzen und daraus erst N zu berechnen, nicht aber zu versuchen, die Formeln 2 oder 3 für N unmittelbar anzuschreiben, weil dabei erfahrungsmässig leicht Irrthümer begangen werden.

Ist in Gleichung 3 die Seitenkraft $K \cos \alpha$ allein schon im Stande die Centripetalbeschleunigung zu erzeugen, nämlich

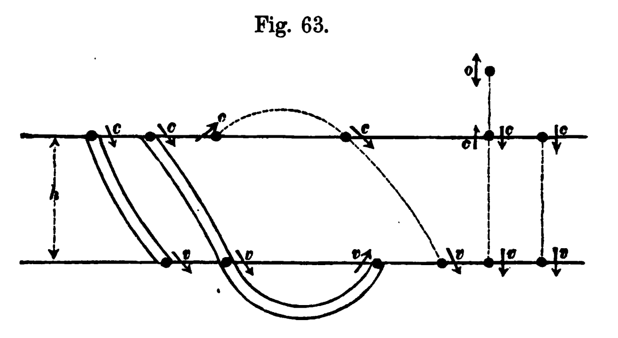
$$\frac{m v^2}{\varrho} = K \cos \alpha.$$

so wird $N = 0$. An einer Stelle der Bahnlinie, für welche dies gilt, ist die Röhrenwandung bezw. der Führungsdraht überflüssig.

Für die Fälle der vorgeschriebenen Bewegung ist der Satz vom Arbeitsvermögen besonders vortheilhaft, weil der unbekannte Widerstand N keine Arbeit verrichtet, daher auch keinen Einfluss auf die Geschwindigkeitsgrösse hat.

Von besonderer Wichtigkeit sind solche Fälle der vorgeschriebenen Bewegung, bei denen als bewegende Kraft nur die Schwere auftritt. Denkt man sich zwei wagerechte Ebenen im Abstande h von einander (Figur 63), die durch beliebig, aber stetig, gekrümmte Röhren als vorgeschriebene Bahnlinie mit einander verbunden sind, so wird ein Massenpunkt, der oben mit einer Geschwindigkeit c in eine Röhre geworfen wird, sie unten mit der Geschwindigkeit v verlassen, und es gilt, weil nur die Schwere Arbeit verrichtet,

Fig. 63.



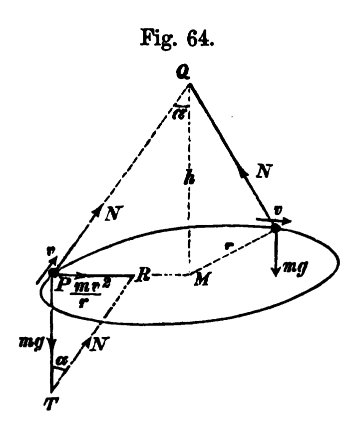
$$\tfrac{1}{2} m v^2 - \tfrac{1}{2} m c^2 = m g h \text{ oder}$$
$$v^2 = c^2 + 2 g h,$$

ganz wie bei der freien Fallbewegung. Ob der Punkt in freier (gerader oder parabolischer) Bahnlinie oder in beliebig gekrümmter vorgeschriebener Bahnlinie sich bewegt, ist für die Geschwindigkeitsgrösse gleichgültig. Jedes Mal, wenn er um h sich gesenkt hat, wird das Quadrat der Geschwindigkeit um $2gh$ gewachsen sein. Bei aufwärts gerichteter Bewegung gilt $v^2 = c^2 - 2gh$.

15. Vorgeschriebene Bewegung in wagerechtem Kreise.

Die vorgeschriebene Bahn, etwa aus einem kreisförmig gebogenen Drahte gebildet (Fig. 64), liege in wagerechter Ebene; r sei der Halbmesser. Als bewegende Kraft wirke die Schwere mg. Die Bewegung kann nur eine gleichförmige sein, weil die Schwere hier keine Arbeit verrichtet. Für diese Bewegung ist eine Centripetalkraft $mv^2 : r$, von P nach M gerichtet, erforderlich; folglich muss zu mg ein derartiger Normalwiderstand N hinzutreten, dass die Mittelkraft beider $PR = mv^2 : r$ wird. Ist $PT = mg$, so wird die Strecke TR das gesuchte N darstellen. Selbstverständlich ist dann N an den Punkt P parallel zu verschieben. N weicht von der Lothrechten um einen Winkel α ab, für welchen gilt

Fig. 64.



$$1) \qquad \operatorname{tg} \alpha = \frac{mv^2}{rmg} = \frac{v^2}{gr}.$$

N kann auch aufgefasst werden als Mittelkraft aus einem von P nach M gerichteten Drucke $= mv^2 : r$ und einem lothrecht aufwärts gerichteten von der Grösse mg. Nach dem Gesetze der Wechselwirkung übt der Massenpunkt auf die Bahn dieselben Kräfte in entgegengesetztem Sinne aus, drückt also mit der Kraft $mv^2 : r$ nach aussen, mit der Kraft mg lothrecht nach unten. Die Kräftefigur PTR liegt stets in einer lothrechten Ebene, läuft aber mit dem Massenpunkte um und dreht sich dabei um eine Lothrechte durch M als Achse. Die Richtungslinie von N geht dann durch

den festen Punkt Q dieser Achse, dessen Höhe h dadurch bestimmt ist, dass bei Q der Winkel a sich wieder findet. Es muss dann sein (mit Rücksicht auf Gleichung 1):

$$\operatorname{tg} a = \frac{r}{h} = \frac{v^2}{g r}, \text{ mithin}$$

$$h = \frac{g r^2}{v^2}. \tag{2}$$

Die Kraft N können wir nun, nachdem wir ihre Bedingungen erkannt haben, auch noch in anderer Weise ausüben als durch den Draht. Wir können in Q einen völlig biegsamen und undehnbaren Faden befestigen, diesen in solcher Weise gerade ausspannen, dass h und r seine Projektionen sind, und bei P ihn mit dem Massenpunkte verbinden. Ertheilen wir dann dem Massenpunkte eine Geschwindigkeit

$$v = r\sqrt{\frac{g}{h}} = \sqrt{g r \operatorname{tg} a} \tag{3}$$

in wagerechter Richtung und zugleich rechtwinklig zum ausgespannten Faden, so sind die Bedingungen, welche ursprünglich durch den Draht erzwungen wurden, auch mittels dieser Fadenaufhängung erfüllt; es wird also der wagerechte Kreis vom Halbmesser r gleichmässig mit der Geschwindigkeit v durchlaufen werden.

Der Draht erzwingt auch bei anderer, etwa grösserer, Geschwindigkeit v_1 eine gleichförmige Kreisbewegung, doch wird dann $\operatorname{tg} a$ (nach Gl. 1) grösser. Bei der weniger bestimmten Fadenaufhängung ist aber genau diejenige Geschwindigkeit v erforderlich, die Gl. 3 entspricht. Was erfolgt, wenn die abweichende Geschwindigkeit v_1 dem Punkte ertheilt wird, soll weiter unten (S. 90) noch erörtert werden.

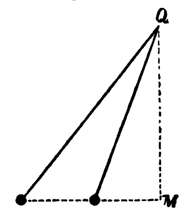
Da der Faden eine Kegelfläche beschreibt, so heisst diese Vorrichtung ein Kegelpendel. Bei einem Umlaufe muss der Punkt die Wegeslänge $2 r \pi$ zurücklegen, wozu eine Zeit t erforderlich ist, welche sich mit Hülfe von Gl. 3 zu

$$t = \frac{2 r \pi}{v} = 2\pi\sqrt{\frac{h}{g}} \tag{4}$$

ergiebt. Hiernach ist die Umlaufszeit t eines Kegelpendels nur von seiner Vertikalprojektion, der Höhe h, abhängig. Mehrere in Q

befestigte Kegelpendel gleicher Höhe h (Fig. 65) werden mithin dieselbe Umlaufszeit haben. Es rührt dies daher, dass bei gleichem h die erforderlichen Geschwindigkeiten v nach Gl. 3 in gleichem Verhältnisse mit r, also auch mit den Wegeslängen eines Umlaufes, wachsen.

Fig. 65.



Beispiel: Ist $r = 1^m$; $h = 1^m$, so muss

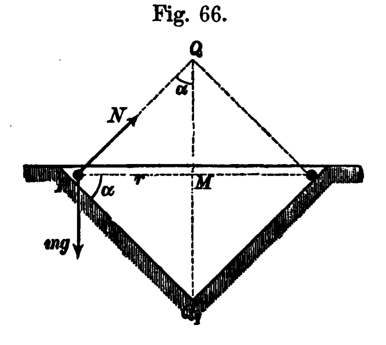
$$v = 1 \sqrt{\frac{9{,}81}{1}} = 3{,}13 \,{}^m/_s,$$

entsprechend einer Fallhöhe $r^2 : 2h = {}^1/_2{}^m$ gemacht werden.

Es ist dann die Umlaufszeit $t = 2\pi \sqrt{\frac{1}{9{,}81}} = 2{,}01$ Sekunden.

Anstatt durch die Spannkraft eines Fadens kann die Kraft N auch durch den Gegendruck einer festen Fläche ausgeübt werden; letztere muss an der Stelle der Berührung mit dem Massenpunkte rechtwinklig zur Richtung von N stehen, mithin von der Wagerechten um den durch Gleichung 1 bestimmten Winkel abweichen. Dieser Bedingung würde genügt werden durch eine Kugelfläche mit dem Mittelpunkte Q (Fig. 64) und dem Halbmesser QP, welche der unmittelbarste Ersatz des Fadens QP sein würde. Eine Kegelfläche mit der Spitze in Q_1 (Fig. 66) erfüllt die Bedingung aber ebenfalls, sobald ihre Seiten mit der Wagerechten den Winkel α bilden. Soll der Massenpunkt in solchem Trichter eine wagerechte Kreisbewegung vom Halbmesser r ausführen, so muss ihm eine wagerechte Anfangsgeschwindigkeit rechtwinklig zu MP von der Grösse $v = \sqrt{g r \operatorname{tg} \alpha}$ (Gl. 3) ertheilt werden.

Fig. 66.

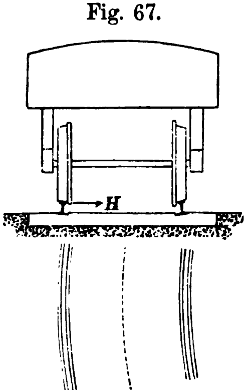


Einer solchen Kegelfläche müssen auch die Oberkanten der beiden Schienen eines Eisenbahngleises angehören, wenn die Mittellinie desselben in einem wagerechten Kreisbogen vom Halbmesser r liegt.

Würden die Schienen nämlich in gleicher Höhe liegen (Fig. 67), so könnte die erforderliche Centripetalkraft $m v^2 : r$ nur von dem

seitlichen Gegendrucke H der äusseren Schiene gegen den Spurkranz des Rades geliefert werden. Einer solchen Aufgabe ist aber die Schiene bei grösserer Geschwindigkeit, wobei H gross wird, nicht gewachsen.

Fig. 67.



Hebt man nun die äussere Schiene um h gegen die innere (Fig. 68), so dass die Oberfläche des Schienengleises um α gegen die Wagerechte geneigt ist, so leistet das Gleis einen Normalwiderstand N, der um α von der Lothrechten abweicht und mit dem Gewicht mg die nöthige Centripetalkraft $mv^2 : r$ liefert. Ein Seitendruck der Schienen gegen die Spurkränze tritt nun nicht ein, wenn die Geschwindigkeit v dem Winkel α entspricht, d. h. wenn $v = \sqrt{g r \operatorname{tg} \alpha}$ ist.

Ist b die Entfernung der beiden Schienen eines Gleises (Fig. 68), so beträgt die erforderliche Überhöhung der **äusseren** Kurvenschiene

Fig. 68.

$$h = b \sin \alpha, \quad \text{wobei } \operatorname{tg} \alpha = \frac{v^2}{g r}.$$

In den vorkommenden Fällen der Anwendung ist α stets so klein, dass $\sin \alpha = \operatorname{tg} \alpha$ gesetzt werden kann, so dass

$$5) \qquad h = b \frac{v^2}{g r} \text{ wird.}$$

Beispiel: Für eine Eisenbahnkurve von 600 m Halbmesser, $b = 1{,}5$ m Schienenentfernung ergiebt sich für 20 m sekundl. Geschwindigkeit

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{20^2}{9{,}81 \cdot 600} = 0{,}068; \ \alpha = 3^\circ 54'; \ \sin \alpha = 0{,}068; \ h = 1{,}5 \cdot 0{,}068 = 0{,}102 \text{ m}.$$

Diese Formel ist beim Eisenbahnbau lange benutzt worden; in neuerer Zeit hat man statt ihrer eine einfache Erfahrungsformel gewählt, was darin seine Begründung findet, dass die Schienen-

überhöhung nicht allein dem hier besprochenen Zwecke dienen, sondern zugleich noch andere Verhältnisse berücksichtigen muss.


Fig. 69.

Beispiel: Auf demselben Grunde beruht die Nothwendigkeit der Schrägstellung eines Kunstreiters (Fig. 69), welcher, auf dem Pferde stehend oder sitzend, im Kreise vom Halbmesser r mit einer Geschwindigkeit v sich bewegt. Für $r = 5^m$, $v = 3^m/_s$. wird $\operatorname{tg} \alpha = \frac{3^2}{9{,}81 \cdot 5} = 0{,}18$; α etwa $= 10^0$. Wächst aber die Geschwindigkeit auf $v = 5$, so wird $\operatorname{tg} \alpha = 0{,}51$; $\alpha = 27^0$.

16. Vorgeschriebene Bewegung in lothrechtem Halbkreise.

BPC (Fig. 70) sei eine nach einem Halbkreise vom Halbmesser r gebogene Röhre in lothrechter Ebene. Bei B schliesse sich eine Röhre AB von beliebiger Form an; A liege um h über dem Punkte C. Lässt man nun bei A einen Massenpunkt mit der Geschwindigkeit Null in die Röhre gelangen und gleitet er darin ohne Reibung und ohne Klemmen, so tritt er bei B mit einer Geschwindigkeit $v_{max} = \sqrt{2g(h + 2r)}$ in den Halbkreis, weil er von A bis B die Höhe $h + 2r$ durchsunken hat. Von B aus aufwärts steigend, verliert er an Geschwindigkeit, und zwar ist diese an einer beliebigen Stelle P (bestimmt durch den Winkel α) noch $v = \sqrt{2g(h + y)} = \sqrt{2g(h + r - r\cos\alpha)}$. Der Normalwiderstand der Röhre sei N (nach innen gerichtet); dann zerlegt sich mg in $mg \sin\alpha$ (tangential und verzögernd) und $mg \cos\alpha$ (centripetal). Es wird $\frac{v^2}{r} = \frac{N + mg\cos\alpha}{m}$, mithin

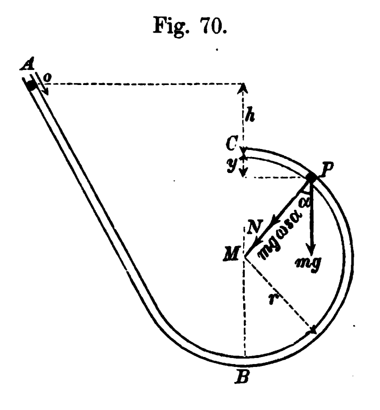


Fig. 70.

$$1) \qquad N = \frac{mv^2}{r} - mg\cos\alpha = mg\left(\frac{2h}{r} + 2 - 3\cos\alpha\right).$$

Für $\alpha = 0$ (Punkt C) wird $\cos \alpha$ möglichst gross, nämlich $= 1$, daher N möglichst klein, nämlich

$$N_{min} = m g \left(\frac{2h}{r} - 1\right); \tag{2}$$

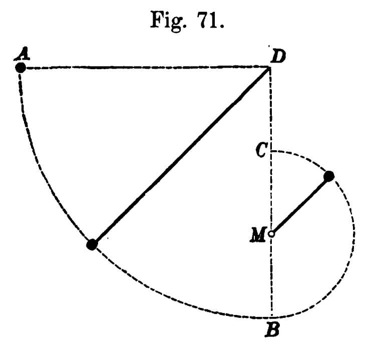
für $\alpha = \pi$ (Punkt B) wird $\cos \alpha$ möglichst klein, nämlich $= -1$, und N möglichst gross, nämlich

$$N_{max} = m g \left(\frac{2h}{r} + 5\right).$$

Im Allgemeinen kann N positiv oder negativ werden. Ein positives N bedeutet einen nach innen gerichteten Widerstand, der von der äusseren Wand der Röhre zu leisten ist, und umgekehrt. Überall wo $N > 0$, muss die äussere Wandung wirken; gegen diese legt sich der Massenpunkt, während die innere Wand überflüssig ist. Soll an allen Stellen $N \geqq 0$ sein, so muss nach Gl. 2 $h \geqq {}^1\!/_2\, r$ sein. In diesem Falle ist, statt einer völligen Röhre, eine einfache Rinne oder ein äusserer Cylindermantel hinreichend, welcher den Massenpunkt hindert, sich von der Kreisbahn tangential nach aussen hin zu entfernen.

Beispiel: Ein stets positives N, welches den Punkt nur hindert, nach aussen aus der vorgeschriebenen Bahn hinauszutreten, kann durch einen einfachen Faden geleistet werden. Damit N auch an der höchsten Stelle noch > 0 bleibe, möge etwa $h = r$ gemacht werden. Dann benutzt man einen Faden von der Länge $3\,r$ (Fig. 71) und befestigt diesen in D. Der Faden wird in der Lage DA wagerecht ausgestreckt; lässt man nun den Massenpunkt los, so beschreibt er den Viertelkreis AB. In M muss nun ein vorstehender dünner Stift sich befinden, damit die oberen zwei Drittel der Fadenlänge in der Lage DM zur Ruhe kommen, das untere Drittel r des Fadens aber sich um M drehe und den Punkt zur Bewegung BC zwinge. Ist der Massenpunkt unmittelbar rechts von B, so wird die Fadenspannkraft $N_{max} = mg\,(2 + 5) = 7\,mg$, d. h. 7 mal so gross, als wenn der Punkt ruhend an dem Faden hinge. Bei der Bewegung nach C hin vermindert sich die Spannkraft auf $N_{min} = m g\,(2 - 1) = mg$. Der Massenpunkt wird sich, nachdem er C erreicht hat, in dem Kreise weiter bewegen (symmetrisch zu CB), und es würde sich der Faden allmählich auf den Stift bei M aufwickeln. Wenn man aber in dem Augenblicke, wo der

Fig. 71.



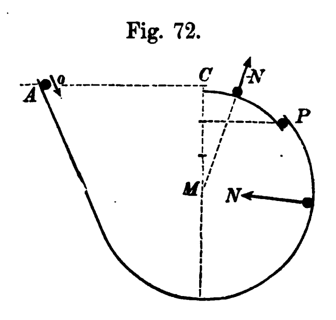
Massenpunkt zum ersten Male wieder in B angelangt ist, den Stift M entfernt oder den Faden vom Stifte abschiebt, so wird der Massenpunkt symmetrisch zu BA einen Viertelkreis vom Halbmesser $3\,r$ beschreiben und auf der rechten Seite sich bis zu der Höhe des Punktes A wieder erheben.

Liegt (Fig. 72) der Anfangspunkt A der Bewegung in gleicher Höhe mit C, ist die Überhöhung $h = 0$, so wird nach Gl. 1 (S. 72)

$$N = mg\,(2 - 3\cos\alpha);$$
$$N_{max} = mg \cdot 5;\quad N_{min} = -mg.$$

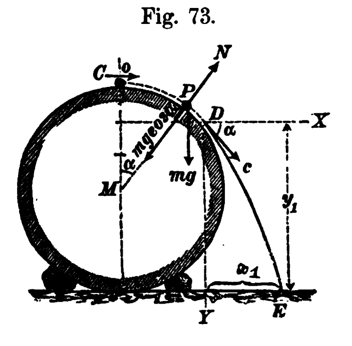
Mithin wird im oberen Theile des Kreises N negativ, nach aussen gerichtet, d. h der Massenpunkt drückt gegen die innere Wandung der Röhre. Der Übergang aus dem Positiven ins Negative erfolgt bei $\cos\alpha = {}^2/_3$; $\alpha = 48^0$; hier ist $N = 0$. Diese Stelle P ist am einfachsten durch Zeichnung zu finden; man theile MC in 3 gleiche Theile und ziehe durch den oberen Theilpunkt eine Wagerechte, so bestimmt diese den Punkt P. Unterhalb desselben ist ein äusserer, oberhalb ein innerer Mantel erforderlich.

Fig. 72.



Diese Betrachtungen finden auch auf einen solchen Fall theilweise Anwendung, wo nur ein innerer Mantel vorhanden ist (Fig. 73), auf welchem der Massenpunkt gleitet. Man denke sich einen ruhig liegenden cylinderischen Körper (Dampfkessel, Strassenwalze, dicker Baumstamm oder dgl.), auf dessen höchster Stelle wir einen Massenpunkt ruhen lassen. Bringt man ihn durch einen genügend schwachen Anstoss in Bewegung, so wird er beschleunigt abwärts gleiten. Der Anstoss soll so gering sein, dass die Anfangsgeschwindigkeit bei C annähernd $=$ Null gesetzt werden kann. An einer Stelle P ist dann die Geschwindigkeit $v = \sqrt{2\,g\,y} = \sqrt{2\,g\,(r - r\cos\alpha)}$. Der Normalwiderstand N kann unter den vorliegenden Umständen nur nach

Fig. 73.



aussen gerichtet auftreten. Daher muss jetzt $\frac{v^2}{r} = \frac{mg \cos a - N}{m}$, mithin $N = mg \cos a - \frac{mv^2}{r} = mg\,(3 \cos a - 2)$ sein. Für $\cos a = {}^2/_3$ oder $a = 48^0$ wird wiederum $N = 0$; an dieser Stelle drückt der Punkt nicht mehr gegen den cylindrischen Körper. Für $a > 48^0$ oder $\cos a < {}^2/_3$ müsste zur Fortsetzung der kreisförmigen Bewegung ein nach innen gerichteter Druck N auftreten; da dieser aber nicht geleistet werden kann, so wird der Punkt von dieser Stelle an ($a = 48^0$) der kreisförmigen Bahnlinie nicht mehr folgen, es wird der Normalwiderstand zu wirken aufhören und der Punkt sich unter alleiniger Einwirkung der Schwere parabolisch weiter bewegen, sich also von dem walzenförmigen Körper trennen. Es soll die weitere Bewegung untersucht und namentlich festgestellt werden, wann und wo der Punkt bei E den Boden erreicht.

Die Geschwindigkeit, mit der diese Bewegung im Punkte D beginnt, ist $c = \sqrt{2\,g\,{}^1/_3\,r}$ mit den Seitengeschwindigkeiten

$$c \cos a = {}^2/_3 \sqrt{{}^2/_3\,gr} = \sqrt{{}^8/_{27}\,gr} = 1{,}7 \sqrt{r}$$

$$c \sin a = \sqrt{1 - {}^4/_9}\,\sqrt{{}^2/_3\,gr} = \sqrt{{}^{10}/_{27}\,gr} = 1{,}9 \sqrt{r}.$$

Nach t Sekunden ist (von D als Anfangspunkt gerechnet)

$$x = tc \cos a = t \sqrt{{}^8/_{27}\,gr}$$

$$y = tc \sin a + {}^1/_2\,gt^2 = t \sqrt{{}^{10}/_{27}\,gr} + {}^1/_2\,gt^2.$$

Für den Endpunkt E gilt $y_1 = {}^5/_3\,r$ oder

$$y_1 = {}^5/_3\,r = t_1 \sqrt{{}^{10}/_{27}\,gr} + {}^1/_2\,gt_1{}^2.$$

Daraus erhält man

$$t_1 = \sqrt{\frac{r}{27\,g}}\,(10 - \sqrt{10}) = 0{,}42 \sqrt{r}$$

und hiermit $x_1 = (10 - \sqrt{10}) \sqrt{\frac{r}{27\,g}\,\frac{8}{27}\,gr} = 0{,}716\,r.$

Der Abstand des Endpunktes E von der Lothrechten CM wird dann

$$r \sqrt{{}^5/_9} + x_1 = 1{,}46\,r.$$

Der vorgeschriebenen kreisförmigen Bewegung und der freien parabolischen Bewegung entsprechen im Punkte D dieselben Kräfte.

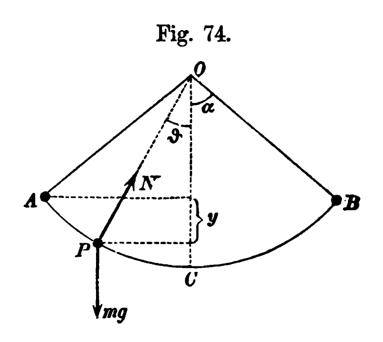
Daraus folgt, dass Parabel und Kreis an der Stelle D nicht allein den Punkt D und die Berührungsgerade gemein haben, sondern dass bei D auch der Krümmungshalbmesser ϱ der Parabel gleich demjenigen der Kreislinie, nämlich $\varrho = r$ sein muss. Berechnet man nach den Formeln der Differentialrechnung und der analytischen Geometrie den Krümmungshalbmesser der parabolischen Bahnlinie DE und setzt in der betreffenden Formel $x = 0$ (Punkt D), so ergiebt sich auch thatsächlich $\varrho = r$.

In ähnlicher Weise würde, wenn in Fig. 72 zwischen P und C die innere Röhrenwandung fehlte, der Massenpunkt bei P in eine parabolische Bewegung übergehen, die sich nicht bis zur Höhe des Punktes C erheben würde.

17. Einfaches (mathematisches) Pendel.

Wiederum möge ein Massenpunkt auf einem kreisförmig gebogenen Drahte in lothrechter Ebene unter Einwirkung der Schwere sich bewegen, jedoch möge der höchste Punkt, wo die Geschwindigkeit Null ist, im unteren Halbkreise liegen (Fig. 74). Der Halbmesser des Kreisbogens sei l. Die Anfangslage A sei durch den Winkel α, eine beliebige Zwischenlage P durch den Winkel ϑ bezeichnet. Der Massenpunkt wird an der Stelle B, der mit A in gleicher Höhe liegt, wieder die Geschwindigkeit Null haben. wird nach A zurückgehen und den Bogen AB und BA fortgesetzt durchlaufen, symmetrisch zur tiefsten Lage C. Solche Bewegung heisst Schwingung. In der beliebigen Lage P ist die Geschwindigkeit

Fig. 74.



$$1)\qquad v = \sqrt{2gy} = \sqrt{2gl(\cos\vartheta - \cos\alpha)}.$$

Es muss also nach Gl. 1, S. 66 sein:

$$\frac{v^2}{l} = 2g(\cos\vartheta - \cos\alpha) = \frac{N - mg\cos\vartheta}{m} \quad \text{oder}$$

$$2)\qquad N = mg(3\cos\vartheta - 2\cos\alpha).$$

Da ϑ und α beide kleiner als $^1/_2\,\pi$ sind, so wird für $\vartheta = \alpha$ $N_{min} = mg\cos\alpha$, für $\vartheta = 0$ aber $N_{max} = mg(3 - 2\cos\alpha)$.

Für $\alpha = 48^0$ und $\cos \alpha = 2/3$ wird z. B. $N_{min} = 2/3\, mg$; $N_{max} = 5/3\, mg$.

Da N stets positiv ist, kann es durch die Spannkraft eines in O befestigten Fadens, an dem der Massenpunkt hängt, geleistet werden. In dieser Form heisst die Vorrichtung ein Pendel, u. zw. ein einfaches oder mathematisches, wenn man die Masse des Fadens vernachlässigt und einen einfachen Massenpunkt annimmt. Ein wirkliches (physisches) Pendel mit Rücksicht auf die körperliche Ausdehnung wird später untersucht werden. Betrachten wir die Bewegung von A aus, so ist die Wegeslänge in t Zeiteinheiten $s = AP = l(\alpha - \vartheta)$, daher

$$ds = -l\,d\vartheta = v\,dt = dt\sqrt{2\,gl(\cos\vartheta - \cos\alpha)};$$

hieraus folgt

$$dt = -\frac{l\,d\vartheta}{v} = -\frac{l\,d\vartheta}{\sqrt{2gl(\cos\vartheta - \cos\alpha)}} = -\sqrt{\frac{l}{g}}\,\frac{d\vartheta}{\sqrt{2(\cos\vartheta - \cos\alpha)}}.$$

Dies ist die Zeit für die Zunahme des Winkels ϑ um $d\vartheta$. Wird nun in der Zeit t der Bogen AP zurückgelegt, so muss

$$3)\qquad t = -\sqrt{\frac{l}{g}}\int_{\alpha}^{\vartheta}\frac{d\vartheta}{\sqrt{2(\cos\vartheta - \cos\alpha)}} \quad \text{sein.}$$

Für $t = 0$ ist nämlich $\vartheta = \alpha$, für $t = t$ aber $\vartheta = \vartheta$. Die Integration lässt sich in geschlossener Form nur ausführen, wenn man sich mit einer Annäherung begnügt, indem man nur kleine Winkel α berücksichtigt. Es ist $\cos\vartheta = 1 - 2\sin^2(1/2\,\vartheta)$, und wenn man den Sinus von $1/2\,\vartheta$ mit dem Bogen $1/2\,\vartheta$ vertauscht,

$$\cos\vartheta = 1 - 2\,(1/4\,\vartheta^2) = 1 - 1/2\,\vartheta^2;$$

ebenso $\cos\alpha = 1 - 1/2\,\alpha^2$, mithin $2(\cos\vartheta - \cos\alpha) = \alpha^2 - \vartheta^2$. Also, wenn man noch in Gl. 3 die Grenzen vertauscht und daher gleichzeitig das Zeichen $-$ durch $+$ ersetzt,

$$t = \sqrt{\frac{l}{g}}\int_{\vartheta}^{\alpha}\frac{d\vartheta}{\sqrt{\alpha^2 - \vartheta^2}}.$$ Dies giebt aber

$$t = \sqrt{\frac{l}{g}}\left[\arcsin\frac{\vartheta}{\alpha}\right]_{\vartheta}^{\alpha}$$

und weil arc sin 1 = $\frac{1}{2}\pi$ ist,

$$t = \sqrt{\frac{l}{g}}\left\{\frac{1}{2}\pi - \text{arc sin}\frac{\vartheta}{a}\right\}.$$

Dies ist die Zeit zum Durchlaufen des Bogens AP.

Um zu ermessen, wie gross der Fehler der Annäherung ist, nehme man $\vartheta = 5^0$ an, dann ist $\cos\vartheta = \cos 5^0 = 0{,}996195$. Es ist aber $\vartheta = \text{arc } 5^0$ $= \frac{5\cdot\pi}{180} = 0{,}087266$, daher $1 - \frac{1}{2}\vartheta^2 = 0{,}996192$; es kommt also erst in der 6ten Decimale eine Abweichung vor.

Die Dauer der Schwingung von A nach B ist offenbar doppelt so gross wie die von A nach C (für $\vartheta = 0$). mithin wird die Dauer t_1 einer einfachen Schwingung von A nach B

$$4)\qquad t_1 = 2\sqrt{\frac{l}{g}}\left(\frac{1}{2}\pi\right) = \pi\sqrt{\frac{l}{g}},$$

was man auch erhält, wenn man zwischen den Grenzen $-a$ und $+a$ integrirt. Es ist für Meter und Sekunden und für $g = 9{,}81$: $\frac{\pi}{\sqrt{g}} = 1{,}003$, mithin

$$t_1 = 1{,}003\sqrt{l} \text{ oder annähernd } t_1 = \sqrt{l}.$$

Für $l = 1^m$ wird $t_1 = 1{,}003$ Sekunden, oder ein Pendel von 1^m Länge macht in der Stunde 3589 einfache Schwingungen. $t_1 = 1$ giebt $l = \frac{g}{\pi^2} = 0{,}994^m$ als Länge des Sekundenpendels.

Da die Länge des Sekundenpendels mit g verhältnisgleich ist, so muss diese Länge an der Oberfläche der Sonne bezw. des Mondes (nach S. 59) 30 bezw. $\frac{1}{6}$ Mal so lang sein.

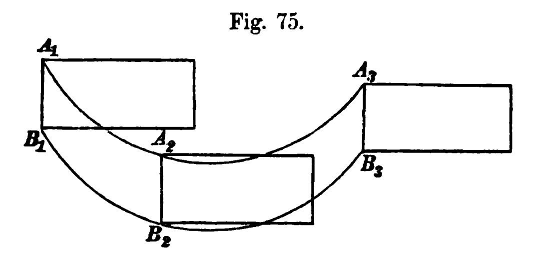
Man kann die Gleichung 4 auch schreiben $g = l\frac{\pi^2}{t^2}$, kann also mit Hülfe von Pendelschwingungen aus der gemessenen Pendellänge l und der beobachteten Dauer t einer Schwingung die Fallbeschleunigung an der betreffenden Stelle der Erde berechnen.

18. Scheinbare (relative) Bewegung eines Massenpunktes in Bezug auf einen fortschreitenden Raum.

Die Bewegung eines körperlichen Gebildes, eines Raumes heisst fortschreitend, wenn alle Theile desselben stets parallel ihrer

Anfangslage bleiben (Fig. 75); hiermit ist nothwendig verknüpft, dass dann alle Punkte des Körpers völlig übereinstimmende, nur parallel gegen einander verschobene Bahnlinien $A_1 A_2 A_3$ und $B_1 B_2 B_3$ beschreiben, daher in einem bestimmten Augenblicke völlig übereinstimmende Geschwindigkeiten haben.

Fig. 75.



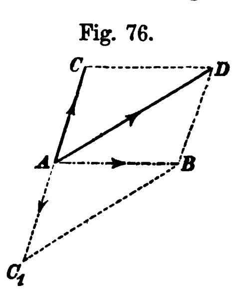
Die Bahnlinien brauchen dabei nicht geradlinig zu sein. Solche fortschreitenden Bewegungen werden auch Verschiebungen genannt, während man eine beliebige Bewegung, bei welcher der Körper der Anfangslage nicht parallel bleibt, als Verrückung bezeichnet.

Verschiebungen mit geraden Bahnlinien kommen sehr häufig vor; ein Eisenbahnwagen, ein Schiff führt solche auf geraden Strecken aus. Wenn aber der Wagen oder das Schiff einen krummlinigen Weg beschreibt, so erfährt der Eisenbahnwagen stets, das Schiff meistens eine Veränderung seiner Richtung, d. h. nicht mehr eine einfache Verschiebung. Eine parallele Verschiebung des Raumes wird im Folgenden angenommen.

Wenn nun ein Massenpunkt während der Zeit t eine Bahnlinie AB (Fig. 76) beschreibt, diese Bahnlinie aber einem sich verschiebenden Raume angehört und daher der Punkt A gleichzeitig in dem Zeitraume t die Strecke AC zurücklegt, so wird nach S. 17 die wahre Bewegung des Punktes gefunden, indem man aus AB und AC ein Parallelogramm zeichnet, dessen vierter Eckpunkt D dann der wahre Ort des Punktes ist. Die Bewegung AB in dem fortschreitenden Raume heisst die scheinbare Bewegung des Punktes, weil ein in dem Raume befindlicher Beobachter, der die Bewegung des Raumes mitmacht, nur diese Bewegung wahrnimmt, oder die relative Bewegung in Bezug auf den Raum. Alle Bewegungen, die die Fahrgäste eines fahrenden Eisenbahnwagens in demselben ausführen, sind solche scheinbaren Bewegungen. Die wahre oder absolute Bewegung AD ist die Resultirende aus beiden Seitenbewegungen.

Häufig liegt die Aufgabe vor, aus der **wahren** Bewegung AD und der Verschiebung des Raumes AC die **scheinbare** Bewegung AB zu bestimmen. Dies kann nach den früheren Regeln (S. 27) geschehen, indem man die wahre Bewegung AD zerlegt in die eine Seitenbewegung AC (des Raumes) und die gesuchte scheinbare Bewegung AB, nämlich zu den drei Eckpunkten A, C und D den vierten Eckpunkt des Parallelogrammes sucht. Für die Anwendung ist es aber häufig vortheilhafter, das Verfahren so einzurichten, dass die gesuchte Bewegung AB nicht als geometrische Differenz, sondern als geometrische Summe erscheint, d. h. das Parallelogramm so anzuordnen, dass B dem Punkte A diagonal gegenüber liegt. Dies geschieht, indem man die Verschiebung AC des Raumes in entgegengesetztem Sinne als AC_1 aufträgt und aus AD und AC_1 ein Parallelogramm zeichnet, in dem dann B der vierte Eckpunkt des Parallelogramms wird. Ob die Bewegungen AB, AC und AD geradlinig sind oder nicht, ist für das Verfahren der Zu-Zusammensetzung und Zerlegung (wie S. 26 gezeigt wurde) völlig gleichgültig. Bei den Bewegungen kommt es nur auf die Orte nach t Zeiteinheiten an, welche man für die Konstruktion durch Gerade verbinden kann. Dabei ist wieder nicht das ganze Parallelogramm erforderlich; vielmehr genügt es, der Strecke AD der wahren Bewegung die Strecke DB als Entgegengesetztes der Verschiebung des Raumes anzufügen, um in der Schlussstrecke AB die scheinbare Bewegung zu erhalten. Wie früher gezeigt, gelten für die Geschwindigkeiten und Beschleunigungen dieselben Gesetze wie für die Bewegungen; daher haben wir die Sätze:

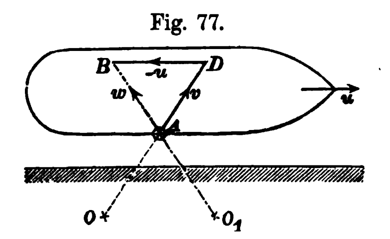
Fig. 76.



Die scheinbare Bewegung in einem fortschreitenden Raume ist die geometrische Summe aus der wahren Bewegung und dem Entgegengesetzten der Bewegung des Raumes. Die Geschwindigkeit bezw. Beschleunigung der scheinbaren Bewegung ist die geometrische Summe aus der wahren Geschwindigkeit bezw. Beschleunigung und dem Entgegengesetzten der Geschwindigkeit bezw. Beschleunigung des Raumes.

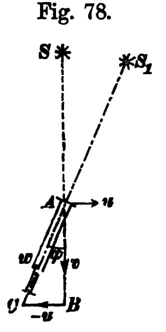
Beispiel 1: Ein Schiff bewege sich gleichförmig, geradlinig fortschreitend mit der Geschwindigkeit u nach rechts (Fig. 77). Vom Ufer aus werde ein Stein in der Richtung OA über das Verdeck hinweg geworfen. Von der Wurfbewegung wollen wir nur die geradlinige gleichförmige Seitenbewegung im Grundrisse berücksichtigen, die mit der wahren Geschwindigkeit v erfolgen möge. Ein auf dem Schiffe mitfahrender Beobachter erblickt nicht die wahre Bewegung, sondern nur die scheinbare, deren Geschwindigkeit w wir erhalten, indem wir in A die Strecke $v = AD$ auftragen und $DB = u$, aber nicht nach rechts, sondern mit entgegengesetztem Sinne, anfügen, dann ist AB die geometrische Summe von v und $-u$, d. h. die gesuchte scheinbare Geschwindigkeit w. In dieser Richtung AB wird der Stein über das Schiff hinwegstreichen, als ob der Wurf etwa von einem Ursprunge O_1 herrührte. Ist der Stein vielleicht ein Stück Kreide, so wird er die Bahnlinie AB selbstthätig aufzeichnen können. Als Probe der Richtigkeit dient die Betrachtung, dass die Geschwindigkeit w, verbunden mit der wirklichen Geschwindigkeit $BD = +u$ des Schiffes, als geometrische Summe wieder die wahre Geschwindigkeit $AD = v$ des Steines liefert. Ist das Verdeck vielleicht mit Tonnen, Ballen u. dergl. besetzt, so wird die Bewegung des Steines über dasselbe sich ungehindert nur dann entwickeln können, wenn längs AB zufällig eine Gasse frei geblieben ist. Diese Gasse ist dann gewissermafsen ein Kanal, eine Röhre, in welcher das fahrende Schiff den Stein so auffängt, dass er, ohne seitlich gestört zu werden, über das Verdeck hinweggleiten kann.

Fig. 77.



Beispiel 2: Nach dem Vorstehenden sind die Bedingungen zu beurtheilen, unter denen ein Fixstern in der Mitte des Gesichtsfeldes eines Fernrohres erscheinen kann. Es findet dies statt, wenn der von dem Sterne ausgehende Lichtstrahl sich in der Richtung der Mittellinie des Rohres fortpflanzt. Stände nun die Erde mit dem Fernrohre fest, so müsste das Rohr genau in die Richtung nach dem Sterne gestellt werden. Da aber die Erde mit dem Fernrohre eine Bewegung um die Sonne ausführt, so kommt die scheinbare Bewegung des Lichtes in Bezug auf die fortschreitende Erde in Frage. Ist (Fig. 78) u die Geschwindigkeit der fortschreitenden Erde und ist die Richtung nach dem zu betrachtenden Sterne rechtwinklig zu u, so hat man an die Geschwindigkeit des Lichts $v = AB$, das Entgegengesetzte BC der Geschwindigkeit u der Erde anzutragen, um in AC die scheinbare Geschwindigkeit w des Lichts gegen das Fernrohr zu erhalten. Diese Richtung AC muss das Rohr haben, damit der vom Sterne S ausgehende Strahl das Fernrohr ungehindert durchlaufen kann, damit also der Stern S in der Mitte des Gesichtsfeldes erscheine. Da man nun ge-

Fig. 78.



wohnt ist, einen im Fernrohre erblickten Gegenstand als in der Richtung des Fernrohres befindlich anzunehmen, so vermuthet man S vielleicht an die Stelle S_1. Der Winkel φ, um den die scheinbare Richtung des Sternes von der wahren abweicht, heisst die Aberration des Lichtes. Die sekundl. Geschwindigkeit der Erde beträgt 29,7 km, die des Lichtes 311 400 km, daher ist

$$tg\,\varphi = 29{,}7 : 311\,400 = 1 : 10485.$$

Dieser Tangente entspricht ein Winkel von etwa 20″.

Beispiel 3: Abschreiten eines vorüber fahrenden Baumstammes. Sieht man einen Baumstamm langsam und gleichmässig auf einer Strasse fahren, so kann man dessen Länge durch Abschreiten schätzen, indem man den Stamm ein Mal, ihn überholend, in der Fahrtrichtung abschreitet, ein zweites Mal gegen die Fahrtrichtung schreitet und für beide Fälle die Schritte zählt. Es empfiehlt sich hierbei, die Zeit eines Schrittes als Zeiteinheit zu wählen, dann ist die Schrittlänge zugleich die Geschwindigkeit v des Schreitenden. Mit u werde diejenige Strecke bezeichnet, welche der Stamm während eines Schrittes zurücklegt. Beim Überholen ist die scheinbare Geschwindigkeit des Schreitenden gegen den Stamm offenbar $v - u$. Ist nun t die Anzahl der Schritte beim Überholen, so muss die Länge l des Stammes betragen $l = (v - u)\,t$. Beim Entgegenschreiten wird die scheinbare Geschwindigkeit $v + u$, daher $l = (v + u)\,t_1$, wenn t_1 die entsprechende Schrittzahl. Aus diesen beiden Gleichungen können u und l ermittelt werden, nämlich zu

$$u = v\,\frac{t - t_1}{t + t_1};\; l = v\,\frac{t\,t_1}{{}^1\!/_2\,(t + t_1)}.$$

Der Schreitende mache in jeder Sekunde 2 Schritte von je 0,8 m. Zum Überholen des Stammes gebrauche er $t = 100$ Schritte, zum Kreuzen nur $t_1 = 20$ Schritte, dann ist $\frac{u}{v} = \frac{80}{120} = \frac{2}{3}$; während eines Schrittes von 0,8 m legt mithin der Baumstamm die Strecke $u = 0{,}8 \cdot \frac{2}{3} = 0{,}533$ m zurück. Die Länge des Stammes beträgt $l = 0{,}8 \cdot \frac{100 \cdot 20}{60} = 26{,}67$ m.

Fährt der Stamm schneller, als der Wanderer schreitet, so ist letzterer nicht im Stande, den Stamm schreitend zu überholen, lässt sich vielmehr von dem Stamme während der Dauer von t Schritten überholen, kehrt dann laufend an das Vorderende des Stammes zurück und lässt ihn in entgegengesetzter Richtung während der Dauer von t_1 Schritten an sich vorbeifahren. In diesem Falle wird leicht gefunden:

$$\frac{u}{v} = \frac{t + t_1}{t - t_1};\; l = v\,\frac{t\,t_1}{{}^1\!/_2\,(t - t_1)}.$$

Es sei jetzt $v = 0{,}75$ m; $t = 300$, $t_1 = 20$; dann wird $\frac{u}{v} = \frac{320}{280} = \frac{8}{7}$, mithin

$$u = 0{,}857\ \text{m};\;\; l = 0{,}75 \cdot \frac{300 \cdot 20}{140} = 32{,}14\ \text{m}.$$

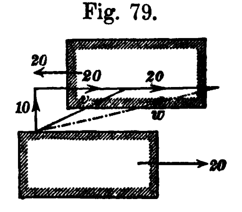
Beispiel 4: Ein Stein werde mit der geringen Geschwindigkeit $v = 10 \frac{m}{s.}$ gegen einen mit $20 \frac{m}{s.}$ fahrenden Eisenbahnzug geworfen; dann ist die scheinbare Geschwindigkeit des Steines gegen den Zug

$$w = \sqrt{10^2 + 20^2} = 10 \sqrt{5} = 22{,}361 \frac{m}{s.}.$$

Diese Geschwindigkeit ist mafsgebend für die Wirkung des Wurfes gegen einen etwa getroffenen Fahrgast, u. zw. ist das hierfür in Frage kommende Arbeitsvermögen $\frac{1}{2} m w^2 = \frac{1}{2} m \cdot 10^2 \cdot 5$, d. h. das 5fache der von dem Werfenden geleisteten Arbeit $\frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m \cdot 10^2$ (S. 53).

In noch viel höherem Grade aber vervielfacht sich die Wirkung, wenn 2 Züge mit je $20 \frac{m}{s.}$ an einander vorbeifahren und der Stein aus einem Zuge gegen den anderen geworfen wird. Dann ist die wahre Geschwindigkeit des Steines die geometrische Summe aus der Seitengeschwindigkeit $c = 10 \frac{m}{s.}$, welche der eine Fahrgast dem Steine ertheilt hat, und der Geschw. $20 \frac{m}{s.}$ des ersten Zuges, d. h. $v = \sqrt{10^2 + 20^2} = 10 \sqrt{5} = 22{,}361 \frac{m}{s.}$.

Fig. 79.



Diesem v ist nun noch, wenn der zweite Zug nach links fährt (Figur 79), dessen Geschwindigkeit $20 \frac{m}{s.}$ nach rechts hinzuzufügen. Dann wird w offenbar die Hypotenuse eines Dreiecks, dessen eine Kathete 10, dessen andere aber $20 + 20 = 40$ beträgt, also

$$w = \sqrt{10^2 + 40^2} = 10 \sqrt{1 + 16} = 10 \sqrt{17} = 41{,}23.$$

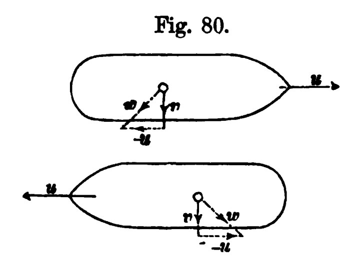
Der in dem zweiten Zuge befindliche, etwa getroffene Fahrgast verspürt also eine Wurfwirkung von der Grösse $\frac{1}{2} m w^2 = \frac{1}{2} m\, 10^2 \cdot 17$, d. h. durch die Bewegung der beiden Eisenbahnzüge ist die Stosswirkung auf das 17fache gewachsen, gegenüber dem Falle, wo der Stein aus einem stillstehenden Zuge auf einen ebenfalls stillstehenden Zug geworfen würde. Die Geschwindigkeit von $10 \frac{m}{s.}$ entspricht einer Fallhöhe von nur $100 \cdot 0{,}051 = 5{,}1\ ^m$; ein Wurf mit solcher Geschwindigkeit ist daher als verhältnismässig harmlos zu bezeichnen. $41{,}23 \frac{m}{s.}$ entsprechen aber einer Fallhöhe von $17 \cdot 5{,}1 = 86{,}7\ ^m$, also einer Thurmhöhe.

Beispiel 5: Fällt von einer über die Eisenbahn führenden Brücke ein Stein lothrecht herab, so ist dessen wahre Bewegung eine lothrechte, gleichförmig beschleunigte mit der Anfangsgeschwindigkeit Null. In Bezug auf einen vorbeifahrenden Zug aber wird die scheinbare Bewegung eine parabolische Wurfbewegung, deren wagerechte Seitengeschwindigkeit das Entgegengesetzte der Geschwindigkeit des Eisenbahnzuges ist. Diese parabolische Bahnlinie wird ein

im Zuge fahrender Beobachter wahrnehmen. Ähnlich ist es auch mit Regentropfen, die, lothrecht fallend, einen Zug treffen. Die Spuren derselben an den Fenstern und Wänden der Wagen werden von der Lothrechten abweichen. — Kann man, Kopf oder Hand aus einem Eisenbahnzuge hinaus haltend, keinen Luftzug wahrnehmen, so muss die umgebende Luft die gleiche Bewegung wie der Zug haben, es muss also ein in der Fahrrichtung wehender Sturm herrschen.

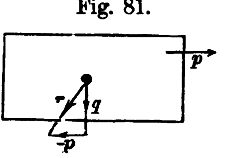
Beispiel 6: Stellung der Windfahne auf einem Schiffe. Eine leicht bewegliche Windfahne, deren Stange ruht, wird durch die Luftbewegung in die Richtung des Windes gestellt. Ist die Stange aber nicht in Ruhe, so kommt für die Stellung der Fahne die scheinbare oder relative Geschwindigkeit der Luft in Bezug auf die Fahnenstange in Frage. Bewegt sich ein Schiff mit $5\,\frac{\text{m}}{\text{s.}}$ und weht rechtwinklig dazu ein Wind von gleicher Geschwindigkeit (Fig. 80), so ist die scheinbare Geschwindigkeit $w = 5\sqrt{2}$ und um 45^0 geneigt gegen die wahre Windrichtung. In der Richtung von w wird die Fahne sich einstellen. Man kann daher auf einem fahrenden Schiffe aus der Richtung der Windfahne nicht ohne Weiteres auf die Windrichtung schliessen. Bei einem entgegengesetzt fahrenden Schiffe würde die Abweichung nach der andern Seite erfolgen, und unter den bezüglich der Geschwindigkeiten gemachten Annahmen würden die Fahnen auf den beiden sich begegnenden Schiffen rechtwinklig zu einander stehen.

Fig. 80.



Beschleunigung der scheinbaren Bewegung. Ist q die wahre Beschleunigung eines Punktes (Fig. 81), so ergiebt sich die scheinhare Beschleunigung r als geometrische Summe von q und dem Entgegengesetzten der Beschleunigung p des betreffenden Raumes.

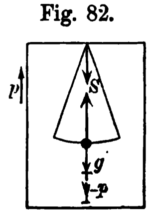
Fig. 81.



Die wahre Beschleunigung q ist die Wirkung einer wahren Kraft $K = mq$; die scheinbare Beschleunigung r kann als die Wirkung einer scheinbaren Kraft mr angesehen werden, die man offenbar erhält als geometrische Summe der wahren Kraft K und einer Kraft $(-mp)$, welche dem Entgegengesetzten der Beschleunigung des Raumes entspricht. Diese Kraft, welche man zu der wirklichen hinzufügen muss, um die scheinbare Kraft zu erhalten, nennt man Ergänzungskraft der scheinbaren Bewegung.

Bewegt sich der Massenpunkt unter Einwirkung der Schwere in einem Raume (Kasten), der selbst eine Beschleunigung p (Fig. 82) lothrecht aufwärts erfährt, so ist die wahre Beschleunigung g; zu dieser muss man p abwärts hinzufügen, um als Summe beider die scheinbare Beschleunigung $r = g + p$ zu erhalten. Die scheinbare Kraft ist $R = m\,(g + p)$. Soll aber der Punkt verhindert werden, in dem Raume zu fallen, etwa dadurch, dass man ihn an einem Faden aufhängt, so muss die Spannkraft S des Fadens die scheinbare Kraft R aufheben, muss also $S = m\,(g + p)$ sein. (Ebenso gross würde der Gegendruck des Bodens sein, wenn der Massenpunkt auf dem Boden des Kastens läge.) Ist die Beschleunigung p des Kastens Null, so ist S einfach gleich dem Gewichte des Punktes. Die Beschleunigung des Kastens hat auf die scheinbare Bewegung denselben Einfluss, als ob die Fallbeschleunigung von g auf $r = g + p$ erhöht wäre. Wird der an dem Faden hängende Punkt durch eine seitliche Bewegung aus der scheinbaren Ruhelage gebracht, so führt er Pendelschwingungen aus, und die Dauer einer kleinen einfachen Schwingung berechnet sich, indem man in der

Fig. 82.



Formel $t = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}$ (S. 78) g mit $g + p$ vertauscht, zu

$$t = \pi \sqrt{\frac{l}{g + p}}.$$

Die Schwingungen erfolgen also wegen der stärkeren Beschleunigung in kürzerer Zeit.

Ist die Beschleunigung p des Kastens nach unten gerichtet, so wird $r = g - p$; $R = m\,(g - p)$ und ein etwaiger Bodendruck oder eine etwaige Fadenkraft ebenfalls $m\,(g - p)$. Die Schwingungsdauer des Pendels wird jetzt

$$t = \pi \sqrt{\frac{l}{g - p}}.$$

Bewegt sich der Kasten mit der Fallbeschleunigung $p = g$, so wird $r = 0$; $R = 0$; der Punkt hat keine scheinbare Beschleunigung gegen den Kasten (da beide gleiche Beschleunigung g haben). Bodendruck oder Fadenkraft werden Null; der Punkt drückt nicht mehr auf den Boden. Ein in dem Kasten befindlicher

Mensch würde den Boden unter den Füssen verlieren. Da die Fadenkraft Null wird, ist auch ein Pendel nicht möglich; die Schwingungsdauer wird dann auch $t = \infty$, d. h. es kommt eine Schwingung nicht zu Stande.

Ist aber die abwärts gerichtete Beschleunigung des Kastens $p > g$, so wird (Fig. 83) die scheinbare Beschleunigung $r = p - g$ nach aufwärts gerichtet; der Massenpunkt fällt nach oben. Ein etwaiger Deckendruck bezw. eine Fadenkraft S wird $m\,(p - g)$, wobei der Faden an dem Boden befestigt sein muss. Bei einem seitlichen Anstosse entstehen Schwingungen um den unteren Befestigungpunkt, u. zw. von der Dauer

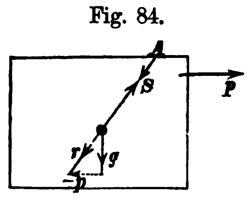
Fig. 83.

$$t = \pi \sqrt{\frac{l}{p - g}}.$$

Das in diesen verschiedenen Fällen über die Spannkraft S des Fadens Gesagte gilt auch, wenn ein Kasten gar nicht vorhanden ist, wenn man vielmehr etwa mit der Hand das eine Ende des Fadens erfasst, während an dem anderen Ende ein Massenpunkt angeschlossen ist. Bewegt man die Hand nach irgend einer Richtung gleichförmig und geradlinig, so ist die Spannkraft des stets lothrechten Fadens gleich dem Gewichte des angehängten Massenpunktes. Bewegt man die Hand aber mit aufwärts gerichteter Beschleunigung, so vergrössert sich die Spannkraft, und es kann in Folge dieser Beschleunigung der Faden möglicherweise reissen. Will man in solchen Fällen das Reissen eines etwas schwachen Fadens oder Seiles vermeiden, so muss die Bewegung eine vorsichtige sein, d. h. eine solche ohne wesentliche Beschleunigung.

Ist der Kasten ein in wagerechtem Sinne beschleunigter Eisenbahnwagen mit der Beschleunigung p, so wird die scheinbare Beschleunigung $r = \sqrt{g^2 + p^2}$ schräg gerichtet; ebenso die scheinbare Kraft $R = m\,r$ (Fig. 84). Soll der Massenpunkt durch einen aufhängenden Faden in scheinbarer Ruhe in dem Wagen erhalten werden, so muss die Fadenspannkraft $S = m\sqrt{g^2 + p^2}$ in die Richtung von r fallen. Um diese scheinbare Gleichgewichtslage als Mitte würden bei einem Anstosse

Fig. 84.

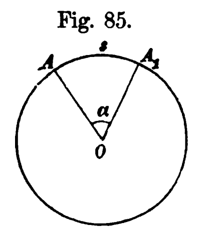


Pendelschwingungen von der Dauer $t = \pi \sqrt{\frac{l}{r}}$ entstehen. Die Richtung von r giebt zugleich die Stellung an, welche ein Fahrgast annehmen muss, um nicht umzufallen, wenn der Wagen eine nach rechts gerichtete beschleunigte Bewegung hat, oder wenn der nach links fahrende Wagen beim Anhalten eine Verzögerung p erfährt.

19. Ruhe in Bezug auf einen sich gleichmässig drehenden Raum.

Dreht sich ein Körper um eine feste Achse O (rechtwinklig zur Bildebene, Fig. 85), so ist die Bewegungsart schon durch die Bewegung eines einzigen Punktes oder auch eines beliebigen Drehungshalbmessers OA bestimmt. Der beliebige Punkt muss sich in einer Kreislinie bewegen und wenn $AA_1 = s$ die während der Zeit t zurückgelegte Wegeslänge ist, so wird $s = f(t)$ das Bewegungsgesetz sein, welches die Kreisbewegung des Punktes A im Abstande $OA = r$ von der Drehachse und damit auch die Drehbewegung des Körpers völlig bestimmt. Es ist dann $v = ds : dt$ die Geschwindigkeit des Punktes A. Setzt man nun $s = AA_1 = r\alpha$, so wird $\alpha = 1/r\,f(t)$ oder $\alpha = \varphi(t)$ das Gesetz der Drehbewegung des Halbmessers OA. Ebenso wie man $v = ds : dt$ die Geschwindigkeit des Punktes A nennt, heisst $\omega = d\alpha : dt = \varphi'(t)$ die Winkelgeschwindigkeit der Drehung, d. h. der auf die Zeiteinheit (Sekunde) bezogene Drehungswinkel oder die Umfangsgeschwindigkeit im Abstande Eins von der Drehachse. Wie $s = r\alpha$ ist auch $v = r\omega$ und $\omega = v : r$.

Fig. 85.

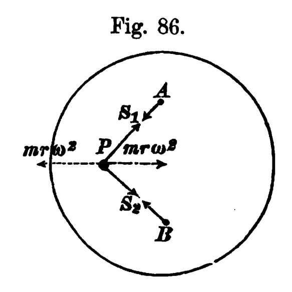


Beispiel: Dreht sich ein Körper in jeder Sekunde ein Mal gleichförmig um seine Achse, so beschreibt ein Punkt im Abstande r von der Achse den Weg $2r\pi$ in jeder Sekunde, mithin ist $v = 2r\pi$; ein Punkt im Abstande $r = 1$ also hat die Geschwindigkeit $\omega = v : r = 2\pi$; oder man kann auch sagen: Der Winkel 2π einer ganzen Umdrehung wird in jeder Sekunde zurückgelegt, daher ist $\omega = 2\pi$. Die Gradzahl eines Winkels ist nicht ein natürliches, sondern ein künstliches, willkürliches Mafs für die Grösse desselben. Die

natürliche Einheit des Winkels ist derjenige Winkel α, dem bei einem Halbmesser Eins eine Bogenlänge Eins entspricht. Da nun einem Winkel von 180° nach dem meist üblichen Gradmafse eine halbe Umdrehung, d. h. ein Bogen π entspricht, so wird der Bogeneinheit eine Gradzahl $180 : \pi = 57{,}3$ entsprechen. Dass dieser Winkel etwas unter 60° liegen muss, ergiebt sich daraus, dass beim Winkel von 60° die Sehne gleich dem Halbmesser, der Bogen also etwas grösser als der Halbmesser ist.

Dreht sich ein Raum gleichförmig mit der Winkelgeschwindigkeit ω um eine feste Achse und befindet sich in dem Raume ein Massenpunkt, und zwar in dem Abstande r von der Achse, in scheinbarer (relativer) Ruhe gegen den Raum, so macht er die Bewegung des Raumes thatsächlich mit, führt mithin eine gleichförmige Kreisbewegung mit der Geschwindigkeit $v = r\omega$ aus, wobei er (nach S. 61) eine Centripetalbeschleunigung $v^2 : r = r^2\omega^2 : r = r\omega^2$ erfährt. Dazu ist dann eine Centripetalkraft von der Grösse $m r \omega^2$ erforderlich. Liegt z. B. auf einer wagerechten Scheibe, die sich gleichförmig mit der Winkelgeschwindigkeit ω um ihre lothrechte Achse dreht (Fig. 86), ein Massenpunkt, etwa eine kleine Kugel, so wird diese zur scheinbaren Ruhe gegen die Scheibe nur durch Kräfte gezwungen werden können, etwa durch die Spannkräfte S_1 und S_2 zweier bei A und B mit der Scheibe verbundenen Fäden. S_1 und S_2 werden dann so gross, dass ihre Mittelkraft von der Grösse $m r \omega^2$ und nach dem Mittelpunkte O gerichtet ist. Hierdurch sind S_1 und S_2 völlig bestimmt.

Fig. 86.



Diese Bedingung für die scheinbare Ruhe kann aber auch in ähnlicher Weise ausgedrückt werden wie die Bedingung für scheinbare Ruhe im fortschreitenden Raume. Haben nämlich die auf den Punkt wirkenden Kräfte S_1 und S_2 die Mittelkraft $m r \omega^2$, so würde das Entgegengesetzte dieser Kraft, also eine radial nach aussen gerichtete Kraft $-m r \omega^2$, mit S_1 und S_2 im Gleichgewichte sein. Diese zu den wirklichen Kräften S_1 und S_2 hinzuzufügende Kraft $-m r \omega^2$, welche mit ihnen im Gleichgewichte sein muss, entspricht dann genau der Ergänzungskraft $-m p$ (S. 84); sie ist, wie diese, keine wirklich vorhandene Kraft, sondern nur eine gedachte Ergänzungskraft der scheinbaren Bewegung bezw. Ruhe und heisst wegen ihrer Richtung Centrifugalkraft. Nach ihrer

Hinzufügung ist dann die Bedingung für den scheinbaren Ruhezustand dieselbe wie für wirkliche Ruhe, nämlich Gleichgewicht der Kräfte. Nur muss man sich hüten, die Centrifugalkraft als eine wirkliche Kraft anzusehen. In dem Falle der Figur 86 ist ja auch durchaus kein Körper nachzuweisen, der den Punkt mit der Kraft $m r \omega^2$ nach aussen triebe, vielmehr sind nur die Fadenkräfte wirksam, die den Punkt hindern, sich von dem Mittelpunkte O zu entfernen. Durchschnitte man die Fäden plötzlich, so würde der Punkt sich auch nicht etwa radial nach aussen bewegen, sondern vielmehr tangential zu seiner bisherigen Kreisbahn mit der Geschwindigkeit v weiter gehen.

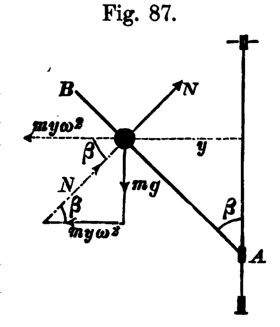
Von einer zum Schleifen dienenden, schnell umlaufenden Schmirgelscheibe fliegen die abgelösten, glühenden Metalltheilchen in tangentialer Richtung fort. Lässt man die Schnur einer Schleuder los, so fliegt der Stein aus derselben in tangentialer Richtung weiter.

Die Centrifugalkraft ist nur eine Hilfsvorstellung zur Vereinfachung mancher Untersuchungen.

Soll ein Massenpunkt gegen einen sich mit der Winkelgeschwindigkeit ω gleichförmig drehenden Raum bei einem Abstande r von der Drehachse in scheinbarer Ruhe verbleiben, so müssen die auf ihn wirkenden Kräfte sich mit der als Ergänzungskraft hinzuzufügenden Centrifugalkraft $m r \omega^2$ im Gleichgewichte halten.

Beispiel: An einer lothrechten Achse (Fig. 87) befinde sich ein schräger Arm AB aus Draht, auf welchem eine kleine Kugel verschiebbar sei. Wirkt auf die Kugel die Schwere mg, so übt der Draht den Normalwiderstand N aus. Beide können sich aber allein nicht im Gleichgewichte halten, sondern es wird unter ihrer Einwirkung die Kugel auf dem Drahte beschleunigt abwärts gleiten. Ertheilt man aber der Achse und damit auch dem Arme eine Winkelgeschwindigkeit ω, so ist es nun möglich, dass die Kugel auf dem Arme sich nicht verschiebe. Die Bedingung dafür besteht darin, dass nach Hinzufügung der Centrifugalkraft $m y \omega^2$ zu den Kräften mg und N Gleichgewicht herrsche. Diese drei Kräfte bilden dann ein rechtwinkliges Dreieck, dessen Hypnotheuse rechtwinklig zum Arme steht, also mit der Wagerechten den Winkel β bildet.

Fig. 87.



Daher muss $\operatorname{tg}\beta = mg : my\omega^2$ oder

1) $$\operatorname{tg}\beta = \frac{g}{y\omega^2} \text{ und } \omega = \sqrt{\frac{g}{y \operatorname{tg}\beta}} \text{ oder } y = \frac{g}{\omega^2 \operatorname{tg}\beta} \text{ sein.}$$

Ist z. B. $\beta = 45^{\circ}$, $\operatorname{tg}\beta = 1$, $\omega = 2\pi$ (1 Umdrehung in der Sekunde), so ergiebt sich $y = \frac{9{,}81}{1 \cdot 4\pi^2} = 0{,}25$ m; d. h. in 0,25 m Abstand von der Achse würde die Kugel nunmehr auf dem Arme in scheinbarer Ruhe verbleiben. Zu jedem anderen Werthe y gehört aber auch ein anderes ω bei sonst gleich bleibenden Verhältnissen.

Um zu erkennen, wie die Kugel sich bei grösserer Winkelgeschwindigkeit, als Gl. 1 entspricht, bewegen würde, denken wir uns (Fig. 88) dicht oberhalb der Kugel einen Vorsteckstift angebracht, der eine Vergrösserung von y verhindert. Dieser Stift übt dann einen Widerstand N_1 in der Richtung des Armes nach unten aus, und es müssen sich nun die Kräfte N_1, N, mg und $my\omega^2$ aufheben. Zerlegt man sämmtliche Kräfte in solche, welche in die Richtung des Armes fallen bezw. dazu rechtwinklig stehen, so muss die Kräftesumme in der Armrichtung Null sein, d. h.

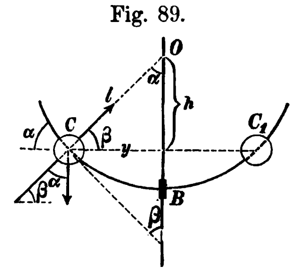
Fig. 88.

$$N_1 + mg\cos\beta - my\omega^2 \sin\beta = 0,$$

mithin
$$N_1 = my\omega^2 \sin\beta - mg\cos\beta$$
$$= mg\cos\beta\left(\frac{y\omega^2 \operatorname{tg}\beta}{g} - 1\right).$$

Ist nun $\omega^2 > \frac{g}{y \operatorname{tg}\beta}$, so wird $\omega^2 y \operatorname{tg}\beta > g$ und $N_1 > 0$; d. h. der Stift leistet der Kugel thatsächlich einen Gegendruck; mithin drückt die Kugel nach dem Gesetze der Wechselwirkung auch gegen den Stift, würde also, falls der Stift fehlte, auf dem Arme nach oben gleiten. Der Stiftdruck wird Null, wenn $\omega^2 y \operatorname{tg}\beta = g$, während ein kleineres ω ein negatives N_1, d. h. den nach oben gerichteten Widerstand eines unterhalb der Kugel angebrachten Stiftes verlangt, entsprechend der Neigung der Kugel, abwärts zu gleiten. Hiermit ist zugleich bewiesen, dass sich beim Kegelpendel (S. 69) der Neigungswinkel gegen die Lothrechte vergrössern wird, wenn man dem Massenpunkt eine zu grosse Geschwindigkeit v giebt, und umgekehrt. Denn die jetzt betrachtete Anordnung ist dem Wesen nach auch ein Kegelpendel.

Fig. 89.



Tritt an Stelle des geraden Armes ein nach einem Kreisbogen vom Halbmesser l geformter (Fig. 89), so behält Gl. 1 ihre Gültigkeit; es ist

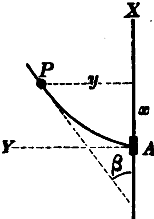
$$\operatorname{tg}\beta\, y\, \omega^2 = g, \text{ oder, weil}$$
$$y = l\cos\beta \text{ und } \beta = 90^{\circ} - \alpha,$$
$$\sin\beta\, l\, \omega^2 = h\,\omega^2 = g \text{ und } h = g : \omega^2,$$

worin h die Tiefe der Kugel unter O bedeutet; h ändert sich im umgekehrten Verhältnisse mit ω^2. Diese Vorrichtung wird als Schwung-

kugel-Regler (Centrifugal-Regulator) zur Regelung des Ganges von Maschinen benutzt. An der lothrechten Achse werden bei O zwei Gelenkstangen von der Länge l befestigt, welche die Kugeln tragen und ihnen zugleich die Kreisbahn CBC_1 vorschreiben. Bei einer Winkelgeschwindigkeit ω wird sich dann die Höhe $h = g : \omega^2$ bilden. Bei grösserer Drehgeschwindigkeit werden die Kugeln steigen, und umgekehrt. Durch geeignetes Gestänge überträgt man das Steigen bezw. Sinken der Kugeln auf die Kraftquelle, indem man diese vermindert bezw. verstärkt.

Soll die Kugel bei gleichbleibender Umdrehungsgeschwindigkeit an jeder Stelle des Armes in scheinbarer Ruhe verbleiben können, so muss die Form des Armes eine solche sein, dass die Gl. 1, S. 90: $\operatorname{tg}\beta\, y\, \omega^2 = g$ für jeden Werth von y Gültigkeit hat. Es muss also offenbar $\operatorname{tg}\beta$ mit y umgekehrt sich ändern. Bezieht man (Fig. 90) die gesuchte Kurve AP auf den Punkt A als Anfangspunkt, so ist $\operatorname{tg}\beta = dy : dx$, mithin $y\,\omega^2 \cdot dy : dx = g$ oder $2\,\omega^2 y\, dy = 2\, g \cdot dx$. Sind zwei Differentiale einander gleich, so dürfen sich deren unbestimmte Integrale nur um eine Konstante C unterscheiden, und man erhält

Fig. 90.



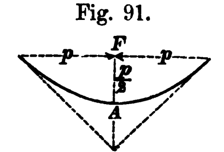
$$\omega^2 y^2 = 2\, gx + C.$$

Weil aber der Punkt A mit den Koordinaten $x = 0$ und $y = 0$ auch der Kurve angehört, so muss die Konstante in obiger Gleichung so bestimmt werden, dass für $x = 0$ auch $y = 0$ wird. Das giebt

$$0 = 0 + C \text{ oder } C = 0, \text{ und nach } y^2 \text{ aufgelöst: } y^2 = 2\left(\frac{g}{\omega^2}\right) x.$$

Diese Gleichung bedeutet eine Parabel, deren Achse mit der x-Achse zusammenfällt und deren Parameter $g : \omega^2$ ist. Für bestimmtes g entspricht jeder Drehgeschwindigkeit ω eine bestimmte Parabel als Gleichgewichtsform. Ist die der Form entsprechende Drehgeschwindigkeit vorhanden, so kann die Kugel an jeder Stelle des Drahtes in scheinbarer Ruhe verbleiben, ist die Geschwindigkeit $> \omega$, so strebt die Kugel fortgesetzt nach aussen, und umgekehrt.

Fig. 91.



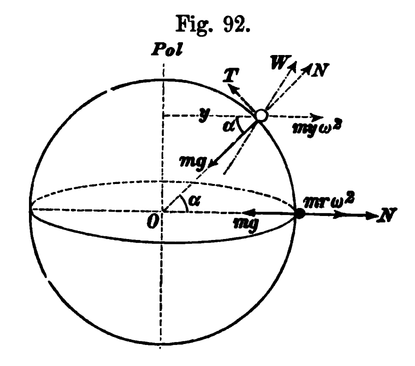
Dreht sich die Achse mit dem Arme in jeder Sekunde 1 Mal um, so ist $\omega = 2\pi$ und der Parameter der Parabel $p = 9{,}81 : (4\,\pi^2) = 0{,}25$ m (Fig. 91).

20. Einfluss der Drehung der Erde um ihre Achse auf das scheinbare Gewicht bezw. die scheinbare Fallbeschleunigung.

Denken wir uns die Erde vorläufig als Kugel vom Halbmesser $r = 6\,370\,000$ m und betrachten wir einen Massenpunkt, der am Äquator auf der Erdoberfläche ruht, so ist dieser Zustand nur ein

scheinbarer Ruhezustand in Bezug auf die sich drehende Erde (Fig. 92). Zu der Anziehungskraft mg der Erde und dem nach aussen gerichteten Normalwiderstande N der Erdoberfläche muss daher noch die Centrifugalkraft $m r \omega^2$ hinzugefügt werden, damit Gleichgewicht entstehe. Daher ist $N = mg - m r \omega^2$. Nun wird aber das Gewicht eines Körpers nach dem Drucke beurtheilt, den er im Ruhezustande auf eine wagerechte Unterlage (die Wagschale) ausübt, so dass N als das scheinbare Gewicht und $N : m$ als die scheinbare Fallbeschleunigung g_0 in der geographischen Breite Null zu bezeichnen ist, also

Fig. 92.



$$g_0 = g - r\,\omega^2.$$

Die Zeit einer Umdrehung der Erde beträgt

$$23^{\text{h.}}\ 56^{\text{m.}}\ 4^{\text{s.}} = 86164^{\text{s}};$$

daher $\omega = 2\pi : 86164 = 0{,}000073$, hiernach wird

$$r\,\omega^2 = 6370000 \cdot 0{,}000073^2 = 0{,}034.$$

Nun ist die scheinbare Fallbeschleunigung am Äquator durch Pendelbeobachtungen (s. S. 78) zu $g_0 = 9{,}781\ \frac{\text{m}}{\text{s.}^2}$ beobachtet, daher wird

$$g = 9{,}781 + 0{,}034 = 9{,}815$$

die wahre Fallbeschleunigung am Äquator, welche bei kugelförmiger Erde für alle Punkte der Erdoberfläche gelten würde.

In einer geographischen Breite α halten sich nun an dem Massenpunkte die Schwere mg, die Centrifugalkraft $m\,y\,\omega^2$ mit dem Gegendrucke W der Erdoberfläche im Gleichgewichte, woraus folgt, dass W im Allgemeinen nicht durch den Erdmittelpunkt O geht. Zerlegt man W in einen Normalwiderstand N und einen Tangentialwiderstand T, so wird, weil $y = r \cos \alpha$,

$$N = mg - m\,r\,\omega^2 \cos^2\alpha = m\,(g - r\,\omega^2 \cos^2\alpha) \text{ und}$$

$$T = m\,r\,\omega^2 \sin\alpha \cos\alpha.$$

Von diesen beiden Seitenkräften ist $N \geqq m\,(9{,}81 - 0{,}034)$ oder $N \geqq m \cdot 9{,}776$, dagegen $T \leqq m \cdot 0{,}034 \cdot {}^1\!/\!_2$ (für $\alpha = 45^0$), daher $N : T \geqq 575$. Da nun N und T die Katheten, W die Hypothenuse

eines rechtwinkligen Dreiecks darstellen, so ist die Hypothenuse W bei solchem Verhältnisse von $N : T$ mit grosser Annäherung gleich N zu setzen. W bedeutet aber wiederum die scheinbare Schwere und $W : m$ die scheinbare Fallbeschleunigung g_a in der geographischen Breite a; mithin ist

$$g_a = g - r\,\omega^2 \cos^2 a = g - r\,\omega^2 + r\,\omega^2 \sin^2 a.$$

Da nun $g - r\,\omega^2 = g_0 = 9{,}781$, so wird

$$g_a = 9{,}781 + 0{,}034 \sin^2 a = 9{,}798 - 0{,}017 \cos 2\,a. \tag{2}$$

Die scheinbare Schwere W würde auch nach Richtung und Grösse die Spannkraft eines Fadens bilden, an welchem ein Massenpunkt etwa als Loth aufgehängt wäre. Da nun W im Allgemeinen nicht mit der Normalen N zusammenfällt, so geht auch die Richtung des Lothes im Allgemeinen nicht durch den Mittelpunkt der Erde, nur am Äquator und an den Polen, wo $T = m\,r\,\omega^2 \cdot {}^1\!/_2 \sin 2\,a = 0$ ist, findet dies Statt.

Für den Winkel δ, um den das Loth von der Geraden nach dem Mittelpunkte der Erde abweicht, gilt

$$\operatorname{tg}\delta = \frac{T}{N} = \frac{m\,r\,\omega^2 \sin a \cos a}{m\,g_a}$$

$$= \frac{0{,}034 \sin a \cos a}{9{,}798 - 0{,}017 \cos 2\,a} = \frac{0{,}017 \sin 2\,a}{9{,}798 - 0{,}017 \cos 2\,a}.$$

Will man wissen, in welcher Breite a dieses ein Maximum wird, so setzt man die Abgeleitete von $\operatorname{tg}\delta$ gleich Null, mithin

$$0 = (9{,}798 - 0{,}017 \cos 2\,a) \cdot 0{,}034 \cos 2\,a - 0{,}017 \sin 2\,a \cdot 0{,}034 \sin 2\,a, \text{ oder}$$

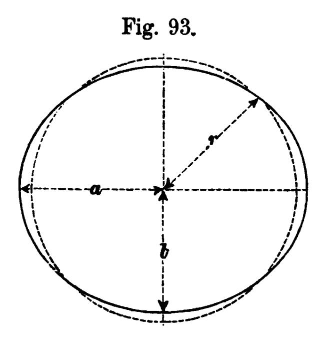
$$9{,}798 - 0{,}017 \cos 2\,a = 0{,}017 \sin 2\,a\,tg\,2\,a$$

und daraus $\cos 2\,a = \frac{0{,}017}{9{,}798} = 0{,}001735$. Das giebt $2\,a = 89^0\,54'$ und $a = 44^0\,52'$.

Wäre die Erde vollkommen kugelförmig, so könnte ihre Oberfläche einen von der Normalen abweichendeu Widerstand W gar nicht leisten; die Seitenkraft T, welche für den scheinbaren Ruhezustand erforderlich wäre, könnte von ihr nicht ausgeübt werden; es würden daher alle leicht beweglichen Körper, namentlich die Wassertheilchen des Meeres nach dem Äquator fortgleiten, bis die Kugelform sich so geändert haben würde, dass W rechtwinklig zur Oberfläche steht. Diese Formänderung findet aber nicht mehr statt, weil die Gestalt der Erde eben keine Kugel ist, sondern ein Ellipsoid, welches jener Bedingung, dass die Richtung des Lothes rechtwinklig

zur Oberfläche steht, entspricht (Fig. 93). Der Erdhalbmesser $a = 6377000^{\text{m}}$ am Äquator ist etwa 21 km grösser als der Polradius $b = 6356000^{\text{m}}$. In Folge dieses Umstandes wird ein Massenpunkt, wenn man ihn vom Äquator her nach dem Pole verschiebt, dem Mittelpunkte der Erde näher kommen, woraus allein schon eine Zunahme der Anziehung folgt, deren Einfluss jene andere Zunahme noch verstärkt, die in Folge der Abnahme der Wirkung der Centrifugalkraft sich ergiebt. Pendelversuche haben ergeben, dass man in Gl. 2 (S. 93) die Zahlenwerthe ändern muss, um sie mit der Wirklichkeit in Übereinstimmung zu bringen; es ist nämlich thatsächlich

Fig. 93.



$$3)\qquad g_\alpha = 9{,}781 + 0{,}051 \sin^2\alpha = 9{,}806 - 0{,}025 \cos 2\alpha.$$

$$\alpha = 0 \quad \text{giebt } g_0 = 9{,}781$$

$$\alpha = 45^0 \quad \text{,,} \quad g_{45} = 9{,}806$$

$$\alpha = 90^0 \quad \text{,,} \quad g_p = 9{,}831 \text{ (am Pole).}$$

Für Hannover ist $\alpha = 52^0\, 23'$, daher $g_\alpha = 9{,}812$.

Da wir das Gewicht eines Liters Wasser (bei 4° C.) unter 45° geographischer Breite als Krafteinheit (Kilogramm) bezeichnet haben, so beträgt das Gewicht dieses Körpers am Äquator

$$9{,}781 : 9{,}806 = 0{,}997^{\text{kg}}, \text{ am Pole } 9{,}831 : 9{,}806 = 1{,}003^{\text{kg}}.$$

Vorstehende Formeln und Zahlen gelten für die Höhe des Meeresspiegels. Die Fallbeschleunigung in einer Höhe von h Metern über dem Meeresspiegel wird dann genau genug gefunden, indem man nach S. 58 die vorstehenden Werthe noch mit $(1 - 2h : r)$, oder, wenn man $r = 6370000^{\text{m}}$ setzt, mit $(1 - 0{,}00000032\, h)$ multiplicirt. Dann wird (genau genug) $g_\alpha = 9{,}806 - 0{,}025 \cos 2\alpha - 0{,}000003\, h$. Auf dem Brocken unter $51^0\, 50'$ geographischer Breite und in etwa 1140^{m} Meereshöhe ist $g_\alpha = 9{,}808$, in Ilsenburg am Fusse des Brocken (260^{m} Meereshöhe) $9{,}811$. Der Unterschied ist also nur gering.

Zweite Abtheilung.

Mechanik starrer Körper.

I. Einleitung.

Einen Körper denken wir uns als aus sehr vielen Massenpunkten zusammengesetzt, die so mit einander in Verbindung stehen, dass sie gegenseitig auf ihre Bewegung einzuwirken vermögen, dass sie also gegenseitig Kräfte auf einander ausüben können. Diese Kräfte, mit welchen die einzelnen Massenpunkte eines Körpers gegenseitig auf einander einwirken, heissen innere Kräfte des Körpers, im Gegensatze zu den äusseren Kräften, welche von anderen Körpern herrühren.

Die Verbindung zwischen den einzelnen Massenpunkten ist bei verschiedenen Körpern eine verschiedenartige. Wir haben zunächst feste Körper zu unterscheiden von nicht festen Körpern. Bei den festen Körpern setzen die einzelnen Massenpunkte einer jeden Änderung der Form des Körpers einen Widerstand entgegen. Die nicht festen Körper heissen flüssige Körper, zu denen im Besonderen auch die gasförmigen Flüssigkeiten zu rechnen sind. Bei diesen zeigen die Massenpunkte keinen Widerstand gegen Formänderung im Allgemeinen, sondern im Wesentlichen nur einen solchen gegen Zusammendrängung auf einen kleineren Rauminhalt.

Denkt man sich die Massenpunkte eines festen Körpers derartig mit einander verbunden, dass die inneren Kräfte jede, auch noch so geringe, Formänderung, um so mehr also gar eine Zerstörung verhindern, so gelangt man zu dem Begriffe vollkommen fester oder starrer Körper. Solche starren Körper giebt es in Wirklichkeit nicht; vielmehr erleidet jeder wirkliche feste Körper unter Einwirkung äusserer Kräfte eine gewisse Formänderung, deren Art und Grösse von den äusseren Kräften und von der Beschaffenheit

des Körpers abhängt. Die inneren Kräfte treten bei äusseren Einwirkungen in Wirklichkeit mit allmählich zunehmender Grösse auf, und erst nach dem Eintreten einer gewissen Formänderung sind sie zu solcher Grösse angewachsen, dass sie nun eine weitere Änderung verhindern können. Überschreitet aber die Grösse der äusseren Kräfte gewisse Grenzen, so tritt eine Zerstörung des Körpers ein. Diese wirklich vorkommenden festen Körper nennt man, im Gegensatze zu den nur gedachten starren Körpern, elastisch feste Körper. Den Unterschied beider kann man sich grobsinnlich vorstellen, indem man (Fig. 94) zwei Kugeln das eine Mal durch eine steife Stange, das andere Mal durch eine nachgiebige Schraubenfeder verbunden denkt. Sucht man mit den Händen die Entfernung der beiden Kugeln zu verändern, so wird dies in dem ersten Falle durch die inneren Kräfte verhindert, in dem zweiten nur in gewissem Grade erschwert.

Fig. 94.

Bei sehr vielen Anwendungen der Mechanik hat nun die Ermittelung der Formänderung eines Körpers oder die Frage nach seiner Festigkeit keinen Werth. In solchen Fällen kann man daher zur Vereinfachung der Aufgaben die Körper als starre betrachten. In anderen Fällen aber wird gerade nach der Festigkeit und der Formänderung der Körper gefragt; dann muss man sie als elastisch fest behandeln. Es wird sich aber zeigen, dass man sehr viele Ergebnisse der Mechanik starrer Körper in der Mechanik elastisch fester Körper verwerthen kann.

2. Zusammensetzung und Zerlegung der Kräfte in einer Ebene und mit gemeinsamem Angriffspunkte.

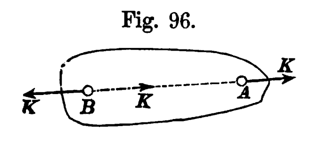
Grundsatz: Zwei gleiche entgegengesetzte Kräfte, deren Richtungslinien in dieselbe Gerade fallen, und die in 2 beliebigen Punkten dieser Geraden an einem starren Körper angreifen, haben auf die Bewegung des Körpers keinen Einfluss, heben sich gegenseitig auf. (Fig. 95.)

Fig. 95.

In der Mechanik des Massenpunktes war eine Kraft durch Grösse, Richtung und Sinn gegeben; jetzt

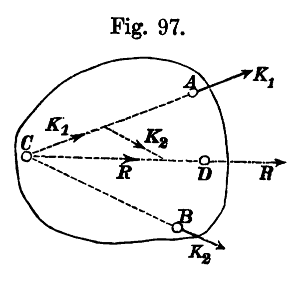
kommt aber auch noch diejenige Stelle des Körpers in Betracht, an welcher die Kraft angreift. Bei Kräften am starren Körper genügt statt dessen schon die Kenntnis irgend eines Punktes der Richtungslinie einer Kraft, oder ihre Lage, zur Beurtheilung ihrer Wirkung, da man jeden Punkt der Richtungslinie einer Kraft als ihren Angriffspunkt behandeln kann. Denn: greift eine Kraft K (Fig. 96) an dem Punkte A eines Körpers an und ist B ein beliebiger, demselben Körper angehöriger Punkt der Richtungslinie von K, so kann man an dem Massenpunkte B zwei in die Gerade AB fallende, entgegengesetzte Kräfte K anbringen, ohne im Bewegungszustande des Körpers etwas zu ändern. Da aber nach dem vorstehenden Satze die in A angreifende Kraft K mit der entgegengesetzten im Punkte B sich aufhebt, so bleibt als gleichwerthig mit der ursprünglich gegebenen die in B angreifende Kraft gleicher Grösse, Richtung und gleichen Sinnes übrig.

Fig. 96.



Zusammensetzung zweier Kräfte mit sich schneidenden Richtungslinien. Die gegebenen Kräfte K_1 und K_2 (Fig. 96) mit den Angriffspunkten A und B lassen sich nach vorstehendem Satze an den Schnittpunkt C der Richtungslinien verlegen und lassen sich hier durch eine Mittelkraft R nach der Lehre über die Zusammensetzung der Kräfte am einfachen Punkte ersetzen. Diese Mittelkraft R darf dann aber wiederum als in irgend einem Punkte D ihrer Linie angreifend gedacht werden. Dabei ist es gleichgültig, ob der Schnittpunkt C der Kraftlinien dem Körper angehört oder nicht, weil die in D angreifende Kraft R den gegebenen K_1 und K_2 in A und B völlig gleichwerthig ist.

Fig. 97.



Ist aber der Schnittpunkt C der Kraftlinien wegen ungünstiger Lage nicht benutzbar, so kann man Grösse, Richtung und Sinn der Mittelkraft R leicht finden, indem man das vorhin bei C gezeichnete Krafteck in A, in B oder an einer beliebigen Stelle zeichnet; zur Auffindung der richtigen Lage von R, die oben durch C bestimmt

war, kann man entweder geometrische Beziehungen benutzen, oder mit besonderem Vortheile einen Satz der Mechanik, den wir jetzt entwickeln wollen, nämlich den Satz der statischen Momente von Kräften.

3. Satz der Drehmomente der Kräfte.

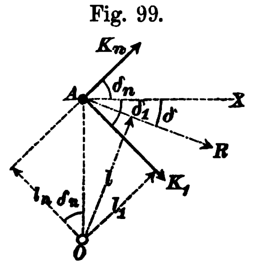
Ist K eine in der Bildebene wirkende Kraft, O eine Achse, rechtwinklig zur Bildebene (Fig. 98), so dass also Kraftlinie und Achse sich im Raume rechtwinklig kreuzen; dann nennt man das Produkt Kraft mal Hebelarm oder Kl das Drehmoment oder statische Moment der Kraft in Bezug auf die Achse O. Der Hebelarm ist die rechtwinkliche Entfernung der Kraft von der Achse.

Fig. 98.

Momentum ist (wahrscheinlich) eine Abkürzung von Movimentum und bedeutet Bewegungsmittel; Drehmoment bedeutet also „Mittel zur Erzeugung einer Drehbewegung“.

Greifen an demselben Massenpunkte A mehrere in der Bildebene liegende Kräfte K_1 und K_2 an, deren Mittelkraft R ist (Fig. 99) und sind l_1, l_n, l die bezüglichen Hebelarme, von der Achse oder dem Drehpunkte O aus gemessen, so lässt sich zeigen, dass das Moment der Mittelkraft R gleich der Momentensumme der Einzelkräfte. Betrachtet man nämlich AO als y-Achse, AX nach rechts als positive x-Achse, welche mit den Kräften die Neigungswinkel δ_1, δ_n und δ bildet, so ist nach der Figur $l_n = OA \cos \delta_n$, ebenso $l_1 = OA \cos \delta_1$, $l = OA \cos \delta$, so dass man die Momente auch schreiben kann: $K_1\, OA \cos \delta_1$, $K_n\, OA_n \cos \delta_n$ und $R\, OA \cos \delta$. Da aber nach der Lehre von der Zusammensetzung der Kräfte (S. 40)

Fig. 99.

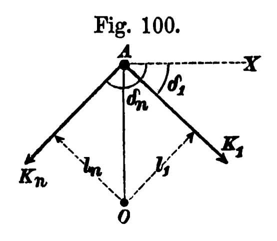


$$R \cos \delta = K_1 \cos \delta_1 + \ldots + K_n \cos \delta_n,$$

so folgt, wenn man allen Gliedern dieser Gleichung den Faktor OA hinzufügt, ohne Weiteres, dass das Moment von R gleich der Summe der Momente der Kräfte K.

In Figur 99 waren sämmtliche cos δ positiv. In Figur 100 aber haben cos δ_1 und cos δ_n verschiedene Vorzeichen, so dass in der Gleichung $R \cos\delta \cdot AO = \Sigma K \cos\delta \cdot AO$ auf der rechten Seite Summanden von verschiedenen Vorzeichen sich ergeben. Die Bedeutung dieses Unterschiedes ist aus der ursprünglichen Erklärung des Momentes Kl nicht ohne Weiteres ersichtlich; sie tritt aber hervor, wenn man die drehende Wirkung der Kräfte, auf die es beim Momente wesentlich ankommt, ins Auge fasst. Denkt man sich den Punkt A mit der Achse O in starrer Verbindung und O als eine feste Drehachse, so haben in Fig. 99 die Kräfte K_1 und K_n übereinstimmend einen Drehsinn ⌒↘ rechts herum, im Sinne der Drehung des Uhrzeigers, während in Figur 100 der Drehsinn der Kräfte verschieden ist. Den Drehsinn rechts herum ⌒↘ pflegt man als positiv zu bezeichnen, die entsprechenden Momente ebenfalls positiv zu setzen, und umgekehrt, doch ist diese Festsetzung eine willkürliche; man könnte auch das Entgegengesetzte wählen. Verschiedener Drehsinn kennzeichnet verschiedene Vorzeichen der Momente, aber welche Richtung man positiv einführen will, steht frei. Es ist jedoch nützlich, sich an eine feste Regel zu binden, damit man bei der Aufschreibung einer Momentensumme nicht unnöthig zu überlegen braucht. Mit Berücksichtigung dieses Umstandes ist dann bei beliebig vielen Kräften in einer Ebene mit gemeinsamem Angriffspunkte

Fig. 100.



$$R\,l = \pm K_1\,l_1 \pm K_2\,l_2 + \ldots \pm K_n\,l_n$$

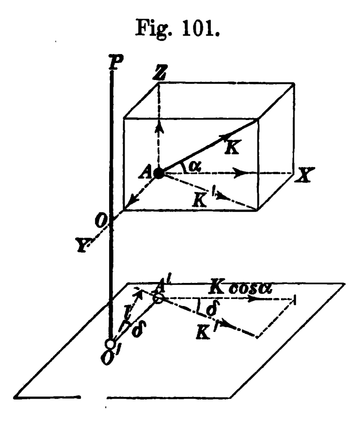
oder kürzer geschrieben

$$1) \qquad \boldsymbol{Rl = \Sigma Kl}.$$

Liegen die an einem Punkte A angreifenden Kräfte nicht in einer zur Achse OP rechtwinkligen Ebene, so ist die bisherige Deutung des Momentes nicht mehr brauchbar. Mit Rücksicht darauf aber, dass das Drehmoment ein Maſs für die drehende Wirkung der Kräfte sein soll, was allerdings erst später, gelegentlich der Betrachtung der Drehbewegung um eine feste Achse näher erläutert werden kann, bezeichnet man als Moment einer Kraft K in Bezug auf eine beliebige Achse OP das Moment derjenigen Kraft K', welche sich als Projektion von K

auf eine zur Achse OP rechtwinklige Ebene ergiebt. Es lässt sich zeigen, dass auch in dieser allgemeinen Bedeutung das Moment der Mittelkraft gleich der Momentensumme der Einzelkräfte ist. Betrachtet man nämlich (Fig. 101) die durch A winkelrecht zu OP gelegte Gerade AO als y-Achse, legt AZ parallel zu OP, und AX winkelrecht zu beiden, so kann man K mittels eines Parallelepipeds in bekannter Weise zerlegen in $K \cos \alpha$, $K \cos \beta$, $K \cos \gamma$, von denen die beiden ersteren unten in der Projektionsebene gleichfalls erkennbar sind. K' bedeutet die Mittelkraft dieser beiden. In der Projektionsebene aber kann das Moment $K'l$ von K' auch in der Form $K' \cdot O'A' \cdot \cos \delta$ (Fig. 101) geschrieben werden, oder, weil $K' \cos \delta$ die Seitenkraft in der Richtung AX, $= K \cos \alpha$ bedeutet, auch in der Form $K \cdot \cos \alpha \cdot OA$. Greifen nun im Punkte A beliebig viele Kräfte K an, deren Mittelkraft R ist, so kann man in gleicher Weise das Moment von R in Bezug auf OP in die Form $R \cos \alpha \cdot OA$ bringen. Weil nun noch $R \cos \alpha = \Sigma K \cos \alpha$, so wird auch

Fig. 101.



$$R \cos \alpha \cdot OA = \Sigma K \cos \alpha \cdot OA,$$

und man hat den Satz:

Für Kräfte an einem Punkte ist das Moment der Mittelkraft gleich der algebraischen Summe der Momente der Einzelkräfte.

Da das Moment der Kraft K zu $\mathfrak{M} = K \cos \alpha \cdot OA$ gefunden wurde, so wird es gleich Null, wenn $\alpha = 90^0$ ist, d. h. wenn K rechtwinklig zu AX steht, sich also in der yz-Ebene befindet, der auch die Achse OP angehört. Das Moment einer Kraft wird also Null in Bezug auf eine Achse, die mit ihr in derselben Ebene liegt, d. h. sie schneidet oder ihr parallel ist.

Eine Kraft, deren Projektion auf die Drehungsebene $= 1^{\text{kg}}$, giebt mit einem Hebelarme $= 1^{\text{m}}$ das Moment Eins. Diese



Momenten-Einheit nennt man, wie die Arbeitseinheit, Meterkilogramm; in ihrer Bedeutung aber ist sie von der Arbeitseinheit verschieden.

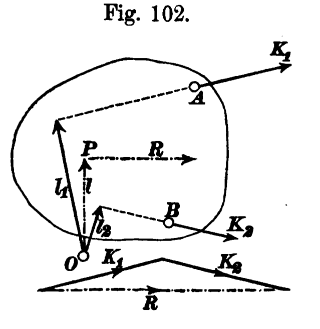
Für Momentengrössen wählen wir den deutschen Buchstaben $\mathfrak{M}$, weil der lateinische Buchstabe M für die Masse eines Körpers vorbehalten werden muss.

Zusatz: Der Satz der Drehmomente ist aus dem Satze vom Parallelepiped der Kräfte hergeleitet. Da ein entsprechender Parallelepiped-Satz auch von Geschwindigkeiten und Beschleunigungen gilt (S. 22 u. 25), so ist der Satz der Drehmomente nicht nur für Kräfte, sondern auch für Geschwindigkeiten und Beschleunigungen gültig.

Nunmehr kann die Lage der Mittelkraft R von zwei in der Zeichenebene liegenden Kräften auch gefunden werden, wenn der Schnittpunkt C in Fig. 97, S. 97, nicht benutzbar ist.

Man ermittelt zunächst (Fig. 102) Grösse, Richtung und Sinn von R, indem man an beliebiger Stelle, z. B. in einer Hülfsfigur aus K_1 und K_2 einen Kräftezug bildet, dessen Schlussseite $= R$. Sodann wählt man eine beliebige Achse O, rechtwinklig zur Zeichenebene, oder, was gleichbedeutend ist, einen Drehpunkt O in derselben, ermittelt die rechtwinklig gemessenen Hebelarme l_1 und l_2 der Kräfte und bedenkt, dass

Fig. 102.



$$R\,l = K_1\,l_1 + K_2\,l_2 \text{ sein muss.}$$

In der Figur haben K_1 und K_2 beide den Drehsinn rechts herum, weshalb ihre Momente positiv angesetzt wurden. R muss dann an dem Hebelarme

$$l = \frac{K_1\,l_1 + K_2\,l_2}{R}$$

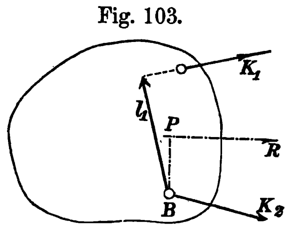
ebenfalls rechts herum drehen. Legt man daher durch O eine Rechtwinklige zur Schlussseite R des Kräftezuges und trägt auf ihr die Länge $l = OP$ ab, so muss die endgültige Lage von R durch P gehen, denn es dreht dann R an dem Arme OP, u. zw. rechts herum, wie erforderlich war. Da man aber O ganz beliebig wählen kann, so wird man ihm eine solche Lage geben, dass die Bestimmung

der Lage von R möglichst einfach wird. Man wähle (Fig. 103) irgend einen Punkt der Richtungslinie von K_2, z. B. B zum Drehpunkte, dann hat K_2 den Hebelarm $l_2 = 0$, und es wird

$$l = \frac{K_1 l_1}{R} = BP,$$

womit die Lage von R bestimmt ist.

Fig. 103.



Beispiel: $K_1 = 20$ kg; $K_2 = 30$ kg (dargestellt durch 2 bezw. 3 cm); sie schneiden sich unter dem Winkel $\alpha = 30^0$; $l_1 = 1{,}5$ cm $= 0{,}015$ m.

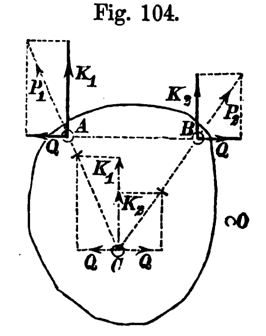
Dann wird $R = \sqrt{400 + 900 + 2 \cdot 20 \cdot 30 \cdot 0{,}866} = 10 \sqrt{23{,}4} = 48{,}4$ kg.

$l = 20 \cdot 0{,}015 : 48{,}4 = 0{,}0062$ m $= 6{,}2$ mm.

4. Zusammensetzung paralleler Kräfte.

Wirken an einem Körper zwei Parallelkräfte K_1 und K_2 gleichen Sinnes (Fig. 104), so kann man deren Angriffspunkte A und B so wählen, dass AB rechtwinklig zu den Kräften ist. Man würde sehr leicht zur Mittelkraft R gelangen, wenn man das vorstehend benutzte Verfahren, welches für Kräfte mit einem in der Endlichkeit liegenden Schnittpunkte gültig war, ohne Weiteres auf Kräfte mit einen unendlich fernen Schnittpunkte anwenden wollte. Doch erscheint es gerathen, die Richtigkeit dieser Erweiterung nachzuweisen. Daher führen wir in A und B 2 gleiche entgegengesetzte Kräfte Q hinzu, wodurch an der Wirkung der Kräfte K_1 und K_2 nichts geändert wird. Die Kräfte im Punkte A lassen sich nun zu P_1, diejenigen im Punkte B zu P_2 vereinigen. P_1 und P_2 aber schneiden sich in C und können hier zu einer Mittelkraft R vereinigt werden, welche dann zugleich die gesuchte Mittelkraft von K_1 und K_2 sein muss. Die Grösse und Richtung von R erkennt man leicht, wenn man mit P_1 und P_2 auch die in A und B gezeichneten Kräfterechtecke an den Punkt C verschiebt, d. h. mittels derselben P_1 in K_1 und Q, P_2 in K_2 und Q zerlegt, dann heben sich Q und Q wieder auf, und es bleiben in C wirksam K_1 und K_2, welche durch

Fig. 104.



$R = K_1 + K_2$ ersetzt werden. Es ist also die Mittelkraft zweier Parallelkräfte gleichen Sinnes gleich der Summe beider, mit ihnen parallel und gleichen Sinnes. Ihre Lage könnte man leicht aus Fig. 104 ermitteln, doch lässt sich zeigen, dass der Satz der Drehmomente auch für Kräfte mit unendlich fernem Schnittpunkte gilt. Wählt man nämlich in Fig. 104 einen beliebigen Drehpunkt O, nennt die Hebelarme von

$$\begin{matrix} K_1 & K_2 & P_1 & P_2 & Q & R & \text{bezw.} \\ l_1 & l_2 & l_3 & l_4 & l_5 & l, & \end{matrix}$$

so ist für die im Punkte A sich schneidenden Kräfte

$$P_1 l_3 = K_1 l_1 - Q l_5 \quad (Q \text{ dreht links}),$$

ebenso für die im Punkte B sich schneidenden Kräfte

$$P_2 l_4 = K_2 l_2 + Q l_5, \text{ also durch Zusammenzählen:}$$

$$P_1 l_3 + P_2 l_4 = K_1 l_1 + K_2 l_2.$$

Für die in C sich schneidenden Kräfte P_1, P_2 und ihre Mittelkraft R gilt aber

$$R l = P_1 l_3 + P_2 l_4 = K_1 l_1 + K_2 l_2,$$

d. h. das Moment der Mittelkraft R = der Momentensumme von K_1 und K_2. Würde in derselben Ebene noch eine Kraft K_3 hinzutreten, so könnte man in gleicher Weise diese mit dem gefundenen R verbinden, und man erkennt leicht, dass bei beliebig vielen Parallelkräften gleichen Sinnes

$$R = \text{und} \parallel \Sigma K \text{ und } R l = \Sigma K l$$

sein muss.

Legt man den Drehpunkt O auf die Richtungslinie von R (Fig. 105), so ist deren Hebelarm Null, und es wird

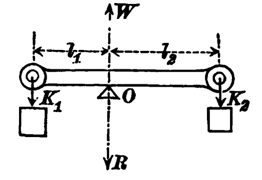


Fig. 105.

$$0 = K_1 l_1 - K_2 l_2, \text{ mithin}$$

$$2) \qquad l_1 : l_2 = K_2 : K_1,$$

d. h. die **Abstände** der Mittelkraft von den beiden Einzelkräften verhalten sich umgekehrt wie die Kräfte selbst. Bei gleichen Kräften liegt die Mittelkraft in deren Mitte, bei ungleichen Kräften aber der grösseren Kraft näher. Man kann auch schreiben:

$$l_1 : (l_1 + l_2) = K_2 : (K_1 + K_2).$$

Beispiel: $K_1 = 30^{kg}$, $K_2 = 20^{kg}$ in der Entfernung $l_1 + l_2 = 2,5^{cm}$. Dann hat man diese $2,5^{cm}$ in dem Verhältnisse 20 : 30 zu theilen, d. h. man theilt $l_1 + l_2$ in 5 gleiche Theile, dann ist $l_1 = {}^2{}_5 (l_1 + l_2) = 1^{cm}$, $l_2 = 1,5^{cm}$.

Die Mittelkraft R, welche K_1 und K_2 völlig ersetzt, kann durch eine entgegengesetzte Kraft $W = R$ aufgehoben werden; W hebt dann zugleich K_1 und K_2 auf, und der Körper verhält sich gerade so, als ob auf ihn gar keine Kräfte wirkten. In Fig. 105 wird die Kraft W durch den Gegendruck einer Schneide ausgeübt, deren Abstände l_1 und l_2 von den Kräften K_1 und K_2 (angehängten Gewichten) genau in dem Verhältnisse $K_2 : K_1$ stehen müssen, damit der Körper auf der Schneide ruhen kann. (Der Körper ist selbst als gewichtlos angesehen.)

Sind 2 Parallelkräfte K_1 und K_2 entgegengesetzten Sinnes (Fig. 106), so fügt man wieder 2 sich aufhebende Kräfte Q in den Punkten A und B der Winkelrechten AB hinzu, vereinigt K_1 und Q in A zu P_1, ebenso K_2 und Q in B zu P_2, zerlegt P_1 und P_2 im Schnittpunkte C wieder in K_1 und Q bezw. in K_2 und Q, so dass dort die beiden Q sich aufheben und ersetzt K_1 und K_2 in C durch die Mittelkraft $R = K_1 - K_2$, welche $\parallel K_1$ und mit der grösseren von beiden gleichen Sinnes, in Fig. 106 also mit K_1. Der Satz der Momente für den Punkt C ergiebt dann $0 = - K_1 l_1 + K_2 l_2$ oder wiederum $l_1 : l_2 = K_2 : K_1$. Der Figur zufolge liegt R in diesem Falle nicht zwischen den Kräften, sondern ausserhalb derselben und auch jetzt wieder näher an der grösseren, d. h. auf der Seite der grösseren Kraft. Nennt man jetzt den Abstand der gegebenen Kräfte l (Fig. 107), so wird $l_2 = l + l_1$, und man erhält: $l_1 : l + l_1 = K_2 : K_1$ oder $l_1 : l = K_2 : (K_1 - K_2)$.

Fig. 106.

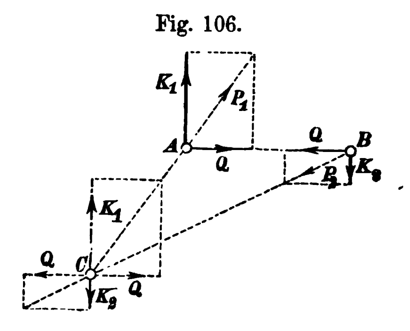
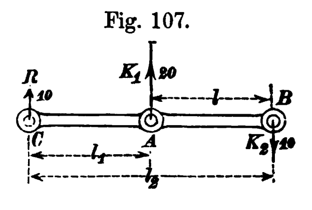


Fig. 107.

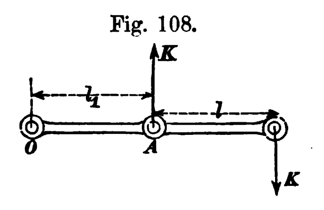


Figur 107 zeigt ein Beispiel, wie zwei Kräfte K_1 und K_2 durch eine Kraft R ersetzt werden können. Das Entgegengesetzte von R würde K_1 und K_2 aufheben, d. h. hält man den Punkt C fest, so wird der Körper durch K_1 und K_2 nicht in Bewegung gesetzt.

Denkt man sich, K_1 sei ursprünglich grösser als K_2 gewesen, nähme aber ab und nähere sich mehr und mehr K_2, während K_2 unverändert bleibt, so wird die Mittelkraft R kleiner und kleiner,

während zugleich l_1 sich fortgesetzt vergrössert. Im Grenzfalle, für $K_1 = K_2$ wird $R = 0$ und $l_1 = \infty$. Die Zusammensetzung zweier gleichen Parallelkräfte entgegengesetzten Sinnes führt also auf eine Mittelkraft von der Grösse Null, die aber in unendlicher Ferne liegt. Eine in der Endlichkeit liegende Kraft von der Grösse Null hat keine Einwirkung auf die Bewegung des Körpers. Die jetzt erhaltene Kraft Null in unendlicher Ferne aber hat eine Wirkung, weil ihr in Bezug auf einen Drehpunkt am Körper ein unendlich grosser Hebelarm zugehört, so dass ihr Moment zunächst in der unbestimmten Form $0 \cdot \infty$ erscheint, wofür wir aber sehr bald einen bestimmten endlichen Werth erhalten werden. Dieses eigenartigen Ergebnisses halber verzichtet man auf die Zusammensetzung zweier solchen Kräfte, nennt sie ein **Kräftepaar** und führt sie als eine besondere Bewegungs-Ursache in die Mechanik ein.

Fig. 108.



Wählt man in der Ebene des Kräftepaares einen beliebigen Drehpunkt O (Fig. 108) im Abstande l_1 von einer der Kräfte K, so ist die Summe der Momente der beiden Kräfte

$$\mathfrak{M} = -Kl_1 + K(l_1 + l) = Kl,$$

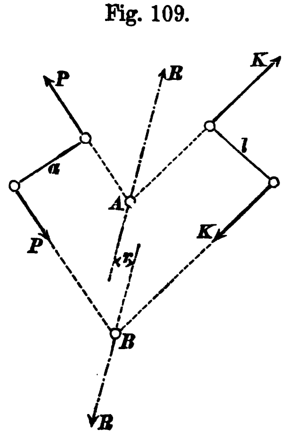
d. h. $\mathfrak{M}$ ist von l_1, also von der Lage des Drehpunktes O unabhängig. Während bei sonstigen Kräften stets die Achse genannt werden muss, wenn die Momente eine bestimmte Bedeutung haben sollen, ist dies bei einem Kräftepaare nicht erforderlich. In Bezug auf jeden Drehpunkt in der Kräfteebene ergiebt sich das gleiche Moment Kl, man nennt daher l den Arm und Kl schlechtweg das Moment des Kräftepaares. Den Drehungssinn erkennt man am einfachsten, wenn man einen Punkt A der einen Kraft als Drehpunkt ansieht.

Der wesentliche Unterschied zwischen der Wirkung eines Kräftepaares und der Wirkung anderer Parallelkräfte besteht darin, dass ein Kräftepaar, weil es keine in der Endlichkeit liegende Mittelkraft hat, auch durch keine in der Endlichkeit liegende Kraft $W = -R$, etwa durch Festhalten eines Punktes C, aufgehoben werden kann. In Figur 108 mag man den Drehpunkt O wählen, wie man will, immer wird das Kräftepaar den Körper mit dem Momente Kl rechts herum in Drehung setzen, während in den Figuren 105 und 107 Punkte O bezw. C gefunden werden konnten, deren Befestigung die Drehwirkung der gegebenen Kräfte K_1 und K_2 vernichtet.

5. Zusammensetzung von Kräftepaaren.

Sind in einer Ebene die Kräftepaare von den Momenten Kl und $-Pa$ gegeben (Fig. 109), so kann man die im Punkte A sich schneidenden Kräfte durch eine Mittelkraft R ersetzen und ebenso die anderen beiden, welche sich in B schneiden. Die beiden Kräfte R sind gleich und entgegengesetzt, bilden daher im Allgemeinen ein Kräftepaar von Momant Rr. Wendet man den Satz der Drehmomente auf die in A sich schneidenden Kräfte an, bezogen auf B, so wird $Rr = Kl - Pa$. Die beiden gegebenen Kräftepaare von entgegengesetztem Sinne lassen sich hiernach durch ein einziges Kräftepaar ersetzen, dessen Moment gleich dem Unterschiede der Momente der gegebenen Kräftepaare, dessen Sinn mit dem des stärkeren Kräftepaares übereinstimmt. Für $Kl = Pa$ entsteht $Rr = 0$, d. h. $r = 0$. Die Kräfte R fallen dann in dieselbe Gerade und heben sich auf. Daraus folgt der Satz:

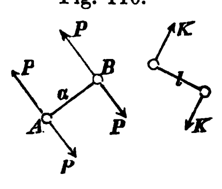
Fig. 109.



Zwei in derselben Ebene wirkende Kräftepaare von gleichen Momenten und entgegengesetztem Sinne heben sich auf.

Ist nun ein Kräftepaar Kl gegeben (Fig. 110), so kann man in derselben Ebene an einem beliebigen Punkte A zwei gleiche entgegengesetzte Kräfte P hinzufügen, ebenso im Punkte B. Wählt man die Lage der Punkte A und B so, dass $Pa = Kl$, so hebt das Kräftepaar Pa mit negativem Drehsinne das gegebene Kl auf, und es bleibt ein Kräftepaar $Pa = Kl$ mit positivem Drehsinn übrig, welches mit dem gegebenen Kl gleichwerthig ist, und man hat den Satz:

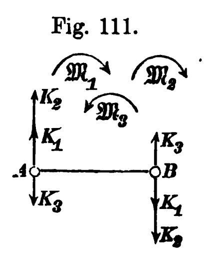
Fig. 110.



Zwei in derselben Ebene wirkende Kräftepaare von gleichen Momenten und gleichem Drehsinne haben gleiche Wirkung.

Hiernach ist die Wirkung eines Kräftepaares gar nicht von der Grösse der Kräfte K, von ihrer Richtung und Lage, sondern nur von dem Momente, dem Drehsinne und der Wirkungsebene abhängig; ein Kräftepaar in einer bestimmten Ebene ist daher durch einen Drehungspfeil ⌒↘ und die Momentengrösse $\mathfrak{M}$ genügend gekennzeichnet. Sind nun in der Zeichenebene mehrere Kräftepaare gegeben, etwa $\mathfrak{M}_1$ und $\mathfrak{M}_2$ von positivem, $\mathfrak{M}_3$ von negativem Sinne (Fig. 111), so kann man sie zu einem einzigen Paare vereinigen; hierzu wählt man einen Arm $l = AB$, macht $K_1 = \mathfrak{M}_1 : l$ und stellt $\mathfrak{M}_1$ durch zwei Kräfte K_1 dar, die an den Punkten A und B angreifen. An denselben Punkten und mit gleichen Richtungen kann man zwei Kräfte $K_2 = \mathfrak{M}_2 : l$ anbringen als Darstellung von $\mathfrak{M}_2$, ebenso zwei Kräfte $K_3 = \mathfrak{M}_3 : l$ mit entgegengesetzten Richtungen. In A kann man die drei Kräfte K_1, K_2 und K_3 zu einer Mittelkraft $R = K_1 + K_2 - K_3$ zusammensetzen, ebenso an B. R und R bilden ein Kräftepaar von dem Moment

Fig. 111.



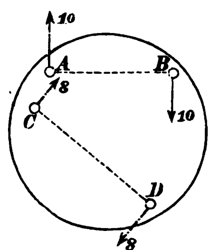
$$\mathfrak{M} = Rl = K_1 l + K_2 l - K_3 l = \mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2 - \mathfrak{M}_3,$$

woraus sich ergiebt:

Mehrere in derselben Ebene wirkende Kräftepaare können zu einem einzigen Paare in derselben Ebene zusammengesetzt werden, dessen Moment gleich der algebraischen Summe der Einzelmomente ist.

War $\mathfrak{M}_1 = 12$ mkg; $\mathfrak{M}_2 = 24$ mkg; $\mathfrak{M}_3 = -20$ mkg und wählt man $l = 1$ m, so wird $K_1 = 12$ kg; $K_2 = 24$ kg; $K_3 = -20$ kg, mithin $R = 12 + 24 - 20 = 16$ kg und das daraus entstehende Kräftepaar $\mathfrak{M} = 16$ mkg.

Fig. 112.

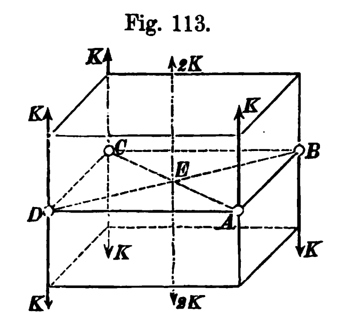


Sind an einem Holzklotze (Fig. 112) die vorstehenden Griffe A und B in 0,16 m Entfernung angebracht, ebenso C und D in 0,2 m Abstand, und übt man an A und B mit den Händen die Kräfte 10 kg aus, also das Moment $10 \cdot 0{,}16 = 1{,}6$ mkg, so kann man ganz dieselbe Wirkung erreichen, wenn man an C und D ein Kräftepaar, bestehend aus zwei Kräften von 8 kg, angreifen lässt. Das zweite Kräftepaar würde, in entgegengesetzter Richtung angebracht, die Wirkung des ersteren völlig aufheben, so dass der Körper sich so verhalten würde, als ob die Kräftepaare gar nicht vorhanden wären. In diesen Beziehungen wird nichts

geändert, wenn man dem Klotze etwa eine feste Drehachse, rechtwinklig zur Bildebene, giebt. Wo die Achse auch liegen mag, — gleichwerthige Kräftepaare werden um diese Achse stets dasselbe Drehungsbestreben haben, während gleiche entgegengesetzte Kräftepaare sich stets gegenseitig tilgen werden.

Auch in eine Parallelebene kann man ein Kräftepaar verschieben, ohne in der Wirkung etwas zu ändern. An einem starren Parallelepiped (Fig. 113) seien die in den Punkten A und B der rechtsseitigen Stirnebene angreifenden Kräfte K gegeben, welche ein Paar bilden. In den Punkten C und D der linksseitigen Stirnebene, welche mit A und B ein Rechteck bilden, füge man je 2 gleiche, aber entgegengesetzte Kräfte K hinzu, dann haben die jetzt vorhandenen 6 Kräfte die gleiche Wirkung, wie die beiden gegebenen. Die beiden Diagonalen des Rechtecks $ABCD$ halbiren sich gegenseitig in E Die in A und C angreifenden aufwärts gerichteten Kräfte K kann man durch ihre Mittelkraft $2K$ im Punkte E ersetzen, ebenso die beiden in B und D angreifenden abwärts gerichteten. Da nun die beiden durch E gehenden Kräfte $2K$ sich aufheben, so bleiben nur noch die in der linksseitigen Stirnebene, bei D aufwärts, bei C abwärts wirkenden Kräfte übrig, welche dem gegebenen Kräftepaare gleichwerthig sind.

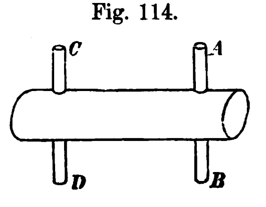
Fig. 113.



Hat ein Körper 2 Arme AB und CD (Fig. 214), so ist es für die Bewegung von gleicher Wirkung, ob man mit den Händen in A und B oder in C und D angreift.

Diese Betrachtung führt dann mit den früheren Sätzen zu dem Ergebnisse:

Fig. 114.

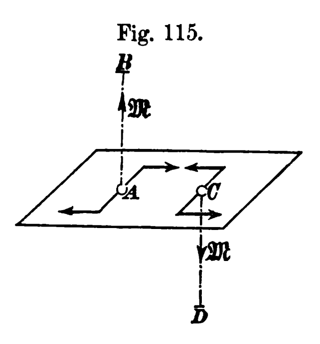


K r ä f t e p a a r e m i t p a r a l l e l e n D r e h u n g s - E b e n e n k ö n n e n d u r c h e i n e i n z i g e s P a a r e r s e t z t w e r d e n, d e s s e n M o m e n t g l e i c h d e r a l g e b r a i s c h e n S u m m e d e r M o m e n t e d e r g e g e b e n e n P a a r e i s t u n d z u d e s s e n D r e h u n g s e b e n e i r g e n d e i n e d e n g e g e b e n e n p a r a l l e l e E b e n e g e w ä h l t w i r d.

Hiernach gehört eine bestimmte Drehungsebene gar nicht zu den kennzeichnenden Eigenschaften eines Kräftepaares, sondern die

Richtung seiner Drehungsebene. Zwei andere Merkmale sind die Grösse des Momentes und der Drehungssinn. Diese drei lassen sich geometrisch mittels einer Geraden darstellen. Man errichtet eine Rechtwinklige zu der gegebenen Drehungsebene und bezeichnet sie als Achse des Kräftepaares. Jede zur Achse rechtwinklige Ebene kann dann zur Drehungsebene gewählt werden. Die Grösse des Momentes lässt sich nach irgend einem Mafsstabe als Strecke auf der Achse abtragen (Fig. 115). Diese Strecke werde von der Ebene aus auf der Achse in solchem Sinne aufgetragen, dass wenn man von dem Endpunkte auf die Ebene blickt, der Drehsinn als rechtsherum erscheint. Der Endpunkt aber lässt sich kennzeichnen, indem man auf der Achse eine nach dem Endpunkte weisende Pfeilspitze anbringt. Das bei A wirkende Kräftepaar (Fig. 115) erscheint, von oben betrachtet, rechts drehend, von der Unterseite der Ebene aber erblickt man das Spiegelbild mit der Drehung links herum (ebenso wie das Spiegelbild einer Uhr oder eine Uhr mit durchscheinendem Zifferblatte, von der Rückseite betrachtet, eine Linksdrehung der Zeiger erkennen lässt). Daher muss der Endpunkt B der Achse AB oberhalb A liegen, durch eine aufwärts weisende Pfeilspitze also B als Endpunkt gekennzeichnet werden, während es für das bei C wirkende Paar gerade umgekehrt ist. Es lässt sich nun weiter zeigen, dass die Zusammensetzung von Kräftepaaren auch in sich schneidenden Ebenen mit Hülfe ihrer Achsenstrecken nach denselben Regeln wie die Zusammensetzung von Einzelkräften erfolgen kann. Dabei bietet sich noch die Erleichterung, dass, während eine Einzelkraft eine bestimmte Lage hat, die Momentenachse an irgend einem Punkte der Drehungsebene errichtet werden konnte, sich also auch beliebig parallel verschieben lässt.

Fig. 115.

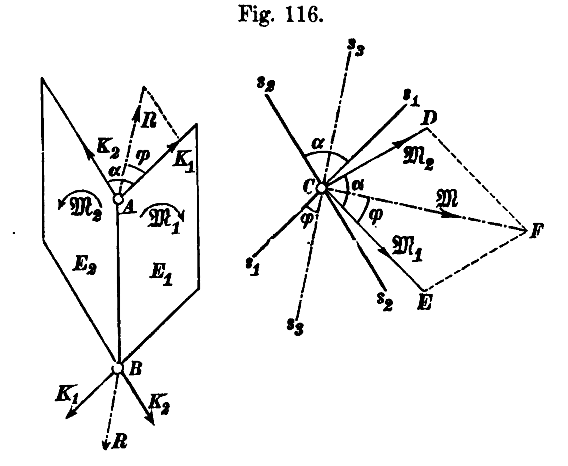


Es seien nun in zwei sich in der Geraden AB unter dem Winkel α schneidenden Ebenen E_1 nnd E_2 (Fig. 116) die Kräftepaare $\mathfrak{M}_1$ und $\mathfrak{M}_2$ mit den durch die Drehungspfeile bezeichneten Drehungssinnen gegeben. Man führe sie beide auf den Arm $AB = l$ zurück, so dass $K_1 l = \mathfrak{M}_1$; $K_2 l = \mathfrak{M}_2$. In A kann man K_1

und K_2 zur Mittelkraft R zusammensetzen, welche mit K_1 den Winkel φ bildet. In B erscheint dann die gleiche entgegengesetzte Parallelkraft R, und man hat an Stelle der gegebenen Paare ein einziges mit dem Moment $R\,l$.

Wendet man aber auf die Achsenstrecken der Kräftepaare die Lehre von der Zusammensetzung der Kräfte an, so gelangt man zu dem gleichen Ergebnisse. Eine Grundrissebene möge die Ebenen E_1 und E_2 rechtwinklig schneiden, dann schliessen die Spuren s_1 und s_2 der Ebenen den Winkel α ein. Zeichnet man nun die Achse des Paares $\mathfrak{M}_1$, so wird diese nach dem früheren von C nach E gerichtet sein müssen; man mache $CE = \mathfrak{M}_1$. Ebenso ist $CD = \mathfrak{M}_2$ die Achse des zweiten Paares. Behandelt man $CE = \mathfrak{M}_1$ und $CD = \mathfrak{M}_2$ wie zwei Einzelkräfte, zeichnet aus ihnen ein Parallelogramm mit CF als Mittelkraft, so ist dieses Parallelogramm ähnlich dem aus K_1 und K_2 gezeichneten; seine Seiten haben die $l$fache Länge des letzteren und stehen zu ihnen rechtwinklig. Daher ist auch $CF = R\,l$, d. h. gleich dem Momente des resultirenden Kräftepaares und steht rechtwinklig auf der Ebene desselben. Von F aus betrachtet erscheint das Paar $R\,l$ rechts drehend; mithin hat CF alle Eigenschaften der Achse des resultirenden Paares $\mathfrak{M}$, und eine Ebene mit der Spur s_3, rechtwinklig zu CF würde als Wirkungsebene von $\mathfrak{M}$ gewählt werden können.

Fig. 116.



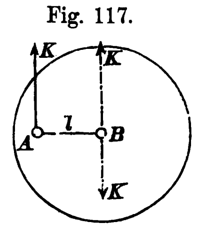
Da das Gesetz vom Parallelogramm der Kräfte unmittelbar zum Parallelepiped-Gesetze führte, so muss letzteres auch für Kräftepaar-Achsen gelten. Danach sind auch die zur Zusammensetzung von Kräften an einem Punkte auf S. 40 angegebenen Verfahren unmittelbar auf solche Achsen zu übertragen. Oder:

Kräftepaare in beliebigen Ebenen lassen sich wie Kräfte, die an einem Punkte angreifen, mit Hülfe ihrer

Achsenstrecken zusammensetzen, indem man letztere parallel an einen gemeinsamen Schnittpunkt verschiebt und wie Einzelkräfte behandelt.

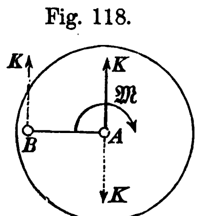
Parallelverschiebung einer Kraft. Greift in einem Punkte A eine Kraft K an (Fig. 117), so kann man zwei gleiche entgegengesetzte K in B hinzufügen; von den drei Kräften bilden nun die ursprünglich gegebene und die entgegengesetzt hinzugefügte ein Kräftepaar $\mathfrak{M} = Kl$, und ausserdem bleibt eine mit der gegebenen gleichgesinnte Kraft K übrig, welche um l gegen die ursprüngliche Lage verschoben ist. Die Parallelverschiebung einer Kraft K um die Entfernung l bedingt also die Hinzufügung eines Paares Kl.

Fig. 117.



Sind aber in einer Ebene eines starren Körpers eine Einzelkraft K in A mit dem Sinne aufwärts und ein Kräftepaar $\mathfrak{M}$ gegeben (Fig. 118), so bringe man $\mathfrak{M}$ auf die Form $\mathfrak{M} = Kl$, lege die eine Kraft K des Paares so durch A, dass sie mit der gegebenen entgegengesetzten Sinn hat, sich also damit aufhebt, und die andere in den Abstand $AB = l = \mathfrak{M} : K$; dann bleibt letztere, durch B gehende Kraft K allein übrig.

Fig. 118.



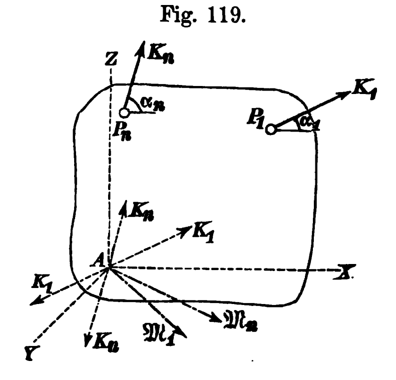
Ein Kräftepaar $\mathfrak{M}$ setzt sich also in derselben Ebene mit einer Einzelkraft K zusammen zu einer Kraft K, welche um $l = \mathfrak{M} : K$ gegen die gegebene Kraft K verschoben ist.

6. Zusammensetzung von Kräften im Raume mit verschiedenen Angriffspunkten.

Greifen an einen starren Körper beliebige Kräfte $K_1 \ldots K_n$ an (Fig. 119), von denen der Einfachheit wegen nur K_1 und K_n gezeichnet werden sollen, so wähle man zum Zwecke möglichster Vereinigung derselben einen beliebigen Punkt A und füge in diesem zwei gleiche entgegengesetzte Kräfte K_1 hinzu; dann bilden die gegebene K_1 und die entgegengesetzt hinzugefügte ein Kräftepaar, dessen Drehungsebene durch K_1 in P_1 und den Punkt A gegeben ist, und dessen Hebelarm l_1 der rechtwinklige Abstand der in P_1

wirkenden Kraft K_1 vom Punkte A ist. Dieses Paar lässt sich durch seine Achse $\mathfrak{M}_1$ darstellen, welche wir durch A legen können. Ebenso verfährt man mit allen übrigen gegebenen Kräften, zuletzt mit K_n. Dann erhält man statt der gegebenen, am Körper zerstreut angreifenden n Kräfte: n Kräfte, deren Richtung, Grösse und Sinn mit den gegebenen übereinstimmen, welche aber alle in dem gemeinsamen Schnittpunkte A angreifen, und ebenso viele Kräftepaar-Achsenstrecken, die man sämmtlich von A ausgehen lassen kann. Die Einzelkräfte K lassen sich wie auf S. 40 zusammensetzen.

Fig. 119.



Sind α_1, α_2 ... α_n die Neigungswinkel der gegebenen Kräfte gegen die positive x-Richtung, β_1, β_2 ... β_n und γ_1, γ_2 ... γ_n diejenigen gegen die y-Richtung, bezw. z-Richtung, so ergiebt sich

1) in der Linie AX eine Kraft $X = \Sigma K \cos \alpha$,

2) in AY „ „ $Y = \Sigma K \cos \beta$,

3) in AZ „ „ $Z = \Sigma K \cos \gamma$,

welche sich zu

4) $$R = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$$

mit den Richtungs-Kosinussen

5) $$\cos \alpha = X : R; \quad \cos \beta = Y : R; \quad \cos \gamma = Z : R$$

zusammensetzen.

Sind die Richtungswinkel der Kräftepaar-Achsen bezw. δ_1, ε_1, η_1 ... δ_n, ε_n, η_n, so ergiebt sich

in AX eine Achse $\mathfrak{M}_x = \Sigma\, \mathfrak{M} \cos \delta$,
„ AY „ „ $\mathfrak{M}_y = \Sigma\, \mathfrak{M} \cos \varepsilon$,
„ AZ „ „ $\mathfrak{M}_z = \Sigma\, \mathfrak{M} \cos \eta$,

welche sich zu einer resultirenden Achse

6) $$\mathfrak{M} = \sqrt{\mathfrak{M}_x^2 + \mathfrak{M}_y^2 + \mathfrak{M}_z^2}$$

mit den Richtungs-Kosinussen

7) $$\cos \delta = \mathfrak{M}_x : \mathfrak{M}; \quad \cos \varepsilon = \mathfrak{M}_y : \mathfrak{M}; \quad \cos \eta = \mathfrak{M}_z : \mathfrak{M}$$

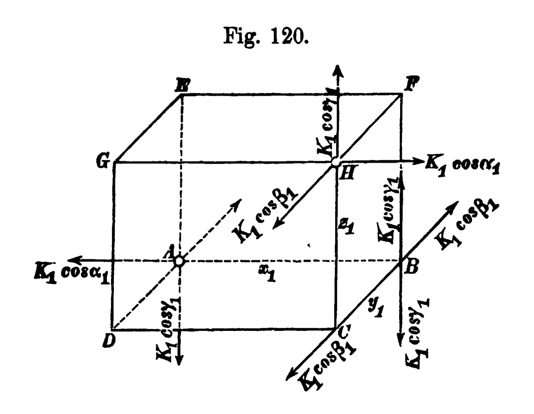
zusammensetzen. Somit haben wir die beliebigen Kräfte zurück-

geführt auf eine **resultirende, durch** A **gehende Einzelkraft** R **und ein Kräftepaar vom Momente** $\mathfrak{M}$.

Die Kraft R ist aus den gegebenen Einzelkräften K völlig bestimmt; die Kräftepaar-Achse $\mathfrak{M}$ ist aber noch nicht auf unmittelbar gegebene Grössen zurückgeführt. Es soll daher der Beitrag einer der gegebenen Kräfte, etwa K_1, zu der Achse $\mathfrak{M}_x$ näher bestimmt werden.

Der Angriffspunkt H von K_1 (Fig. 120) habe die Koordinaten x_1, y_1, z_1, aus denen wir ein rechtwinkliges Parallelepiped zeichnen. Zerlegen wir K_1 in seine drei rechtwinkligen Seitenkräfte und bringen auch in A dieselben Kräfte entgegengesetzten Sinnes an, so bilden die beiden Kräfte $K_1 \cos \gamma_1$ ein Paar, welches in einer Diagonalebene $ACHE$ wirkt. Zur Vereinfachung fügen wir im Punkte B noch zwei solche sich aufhebende

Fig. 120.



Kräfte hinzu; die in A abwärts, in B aufwärts wirkende Kraft bilden ein in der xz-Ebene wirkendes Paar, dessen Achse in AY fällt, mithin zu $\mathfrak{M}_x$ keinen Beitrag liefert. Die in H aufwärts, in B abwärts wirkenden $K_1 \cos \gamma_1$ liegen aber in der Seitenebene $BCHF$, haben von rechts aus betrachtet, positiven Drehsinn, so dass ihre Achse in der Grösse $K_1 \cos \gamma_1 y_1$ auf der AX aufzutragen ist.

Auch zu den beiden $K_1 \cos \beta_1$ fügen wir in B und C noch zwei sich aufhebende hinzu. Die eine hiervon bildet mit der in A angreifenden ein Kräftepaar in der Ebene $ABCD$, dessen Achse in die AZ fällt, also zu $\mathfrak{M}_x$ keinen Beitrag liefert; die in H und B angreifenden aber bilden mit dem Abstande z_1 ein Kräftepaar, dessen Drehsinn von rechts betrachtet negativ ist, dessen Beitrag zu $\mathfrak{M}_x$ also ebenfalls negativ sein muss, nämlich $- K_1 \cos \beta_1 z_1$.

Die beiden in A und H angreifenden Kräfte $K_1 \cos \alpha_1$ liefern zu $\mathfrak{M}_x$ keinen Beitrag, denn ihre Wirkungsebene ist die Diagonal-

ebene $AGHB$, so dass die Achse in der yz-Ebene, mithin rechtwinklig zu AX liegt.

Der gesammte Beitrag der Kraft K_1 zu $\mathfrak{M}_x$ ist also

$$K_1 \cos\gamma_1 \, y_1 - K_1 \cos\beta_1 \, z_1 \, .$$

Die Beiträge der übrigen Kräfte ergeben sich in entsprechender Form, so dass im Ganzen

8) $$\mathfrak{M}_x = \Sigma K \cos\gamma \, y - \Sigma K \cos\beta \, z \quad \text{wird.}$$

In gleicher Weise erhält man für die anderen Richtungen

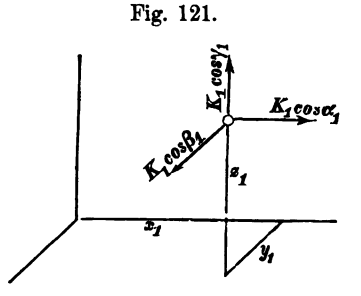
9) $$\mathfrak{M}_y = \Sigma K \cos\alpha \, z - \Sigma K \cos\gamma \, x \quad \text{und}$$

10) $$\mathfrak{M}_z = \Sigma K \cos\beta \, x - \Sigma K \cos\alpha \, y \, .$$

Hiermit ist die Aufgabe der Zusammensetzung der Kräfte gelöst.

$\mathfrak{M}_x$, $\mathfrak{M}_y$ und $\mathfrak{M}_z$ bedeuteten die Achsen von Kräftepaaren; es lässt sich die Bedeutuug derselben aber noch einfacher ausdrücken. Zu dem Zwecke wollen wir das Drehmoment der Kraft K_1 in Bezug auf die Achse AX ermitteln. Wir können für dasselbe nach dem Satze der Momente (S. 100) die Summe der Momente der in H angreifenden Einzelkräfte $K_1 \cos\gamma_1$, $K_1 \cos\beta_1$ und $K_1 \cos\alpha_1$ setzen. Die Seitenkraft $K_1 \cos\gamma$ (Fig. 121) kreuzt die AX rechtwinklig in einem Abstande y_1, hat daher das Moment $K_1 \cos\gamma_1 \, y_1$, und zwar, von rechts gesehen, positiv drehend; $K_1 \cos\beta_1$ kreuzt die AX rechtwinklig in einem Abstande z_1, und zwar, von rechts gesehen, negativ drehend, hat daher das Moment $-K_1 \cos\beta_1 \, z_1$; $K_1 \cos\alpha_1$ aber ist mit AX parallel; hat also (nach S. 100) in Bezug auf AX kein Moment. Das Moment der ursprünglich gegebenen Kraft K_1 in Bezug auf AX ist demnach $K_1 \cos\gamma_1 \, y_1 - K_1 \cos\beta_1 \, z_1$, stimmt also mit dem Beitrage der Kraft K_1 zu der Kräftepaar-Achse $\mathfrak{M}_x$ überein. Hiernach können die Kräftepaar-Achsen $\mathfrak{M}_x$, $\mathfrak{M}_y$ und $\mathfrak{M}_z$ gedeutet werden als die Momentensummen der ursprünglich gegebenen Kräfte K in Bezug auf die Achsen AX, AY und AZ.

Fig. 121.

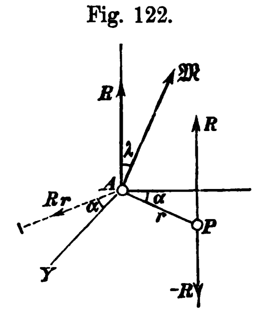


7. Centralachse einer Kräftegruppe.

Die Zusammensetzung einer beliebigen räumlichen Kräftegruppe hat auf R und $\mathfrak{M}$ geführt. R ist einfach die Mittelkraft, die sich bei Parallelverschiebung aller Kräfte an den Punkt A ergab, mithin unabhängig von der Wahl des beliebig angenommenen Punktes A. $\mathfrak{M}$ dagegen ist von den Koordinaten der Angriffspunkte der Kräfte in Bezug auf ein durch A gelegtes Achsenkreuz abhängig, wird daher mit einer Verschiebung des Sammelpunktes A sich ändern. Hat man für einen angenommenen Sammelpunkt A die Mittelkraft R gefunden, so wird eine Verschiebung von A auf der Richtungslinie von R keine Änderung von $\mathfrak{M}$ zur Folge haben, weil man ja jeden Punkt dieser Richtungslinie als Angriffspunkt von R behandeln kann. Verschiebt man aber A nach einer ausserhalb R gelegenen Stelle, entsprechend einer Parallelverschiebung von R selbst, so muss das zugehörige Achsenmoment $\mathfrak{M}$ eine Änderung erfahren.

Um diese Veränderung möglichst einfach zu übersehen, wählen wir die Richtungslinie der im Punkte A erhaltenen Kraft R zur z-Achse (Fig. 122) und legen durch R und die zugehörige von A aus gezogene Momentenachse $\mathfrak{M}$ eine xz-Ebene. $\mathfrak{M}$ bilde mit R den Winkel λ. Will man nun die durch A gehende Kraft R mit einer gleichen Kraft R vertauschen, welche die xy-Ebene in einem Punkte P mit dem Abstande $AP = r$ schneidet, so bringe man in P zunächst zwei sich aufhebende Kräfte R und $-R$ an. Dann bilden R in A und $-R$ in P ein Kräftepaar, dessen Achse Rr in der xy-Ebene liegt und von AY um den Winkel α nach links abweicht, wenn AP mit AX den Winkel α bildet. Dieses Achsenmoment Rr muss nun mit $\mathfrak{M}$ zusammengesetzt werden. Zu dem Zwecke zerlegen wir $\mathfrak{M}$ und Rr nach den drei Achsen und erhalten

Fig. 122.



in der x-Achse: $\mathfrak{M} \sin \lambda - Rr \sin \alpha$,

in der y-Achse: $Rr \cos \alpha$,

in der z-Achse: $\mathfrak{M} \cos \lambda$.

Aus diesen Einzelmomenten entsteht dann das neue Gesammtmoment

$$\mathfrak{M}_1 = \sqrt{(\mathfrak{M} \sin \lambda - Rr \sin a)^2 + (Rr \cos a)^2 + (\mathfrak{M} \cos \lambda)^2}.$$

Hiernach ist $\mathfrak{M}_1 \geqq \mathfrak{M} \cos \lambda$. Es ist aber eine solche Verschiebung von R, d. h. eine solche Wahl des Punktes P möglich, dass $a = 90^0$ und zugleich $Rr \sin a = \mathfrak{M} \sin \lambda$ wird. Dann fallen in der letzten Gleichung die von r und a abhängigen Summanden fort, und es wird einfach

$$\mathfrak{M}_1 = \mathfrak{M} \cos \lambda.$$

Weil nun allgemein $\mathfrak{M}_1 \geqq \mathfrak{M} \cos \lambda$ war, bei der angegebenen Wahl von r und a aber $\mathfrak{M}_1 = \mathfrak{M} \cos \lambda$ wird, so ist unter diesen Umständen das sich ergebende Achsenmoment $\mathfrak{M}_1$ so klein wie möglich; und weil $\mathfrak{M}_1$ gleichbedeutend ist mit dem in die z-Achse fallenden Momente, während die in AX und AY fallenden Momente aufgehoben werden, so ist $\mathfrak{M}_1$ nunmehr parallel der AZ, fällt also mit der Richtung von R zusammen. $a = 90^0$ bedeutet, dass P, der Punkt der neuen Lage von R, auf AY liegen muss, in einem Punkte A_0 (Fig. 123), und zwar muss wegen

$$Rr \sin a = \mathfrak{M} \sin \lambda,$$

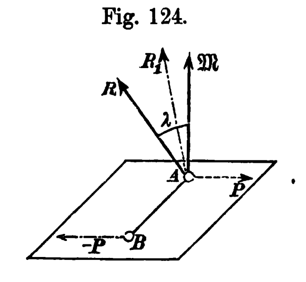
die Parallelverschiebung der Kraft R, nämlich der Abstand $AA_0 = r = \mathfrak{M} \sin \lambda : R$ sein. Die durch A_0 gelegte Richtungslinie von R heisst die Centralachse der gegebenen Kräftegruppe. Das Ergebnis dieser Untersuchung fassen wir noch wie folgt zusammen:

Fig. 123.

Eine an einem starren Körper wirkende Kräftegruppe lässt sich auf unendlich viele Arten zu einer Mittelkraft R und einem Kräftepaar oder Achsenmoment $\mathfrak{M}$ zusammenfassen. Bei allen diesen Arten ist R nach Grösse, Richtung und Sinn dieselbe; nur ihre **Lage** ist verschieden; das Moment $\mathfrak{M}$ ist im Allgemeinen nach Grösse, Richtung und Sinn verschieden. Unter den verschiedenen Lagen von R giebt es eine, die **Centralachse** der Kräftegruppe, bei welcher das Achsenmoment so klein wie möglich wird und mit der Richtung von R zusammenfällt.

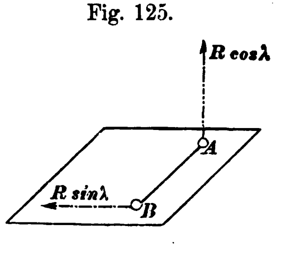
Steht die ursprünglich gefundene Momentenachse $\mathfrak{M}$ rechtwinklig zu R, ist also $\lambda = 90^0$, so wird $\mathfrak{M}_1 = \mathfrak{M} \cos \lambda = 0$ und $r = \mathfrak{M} : R$; d. h. in diesem Falle verschwindet das Achsenmoment $\mathfrak{M}_1$, und die gegebene Kräftegruppe hat sich auf eine Einzelkraft R zurückführen lassen.

Fig. 124.



Eine beliebige Kräftegruppe lässt sich auch stets auf zwei nicht in derselben Ebene liegende Kräfte zurückführen. Ist nämlich das Ergebnis der ersten Zusammenfassung etwa R und $\mathfrak{M}$ im Punkte A (Fig. 124), so kann man $\mathfrak{M}$ in die Faktoren $P \cdot r$ zerlegen, wobei man die eine Kraft P durch A legt, $AB = r$ macht und $- P$ durch B gehen lässt. P und R kann man nun zu R_1 zusammensetzen, so dass R_1 und $- P$ der gegebenen Kräftegruppe gleichwerthig sind. Dabei war die Grösse P beliebig gewählt. Macht man aber $P = R \sin \lambda$, so fällt die Kraft R_1 in die Richtung von $\mathfrak{M}$ und bekommt die Grösse $R \cos \lambda$ (Fig. 125), während die durch B gelegte Kraft $P = R \sin \lambda$ ist. Hiernach ist die Zurückführung einer Kräftegruppe auf zwei im Raume sich rechtwinklig kreuzende Kräfte möglich.

Fig. 125.



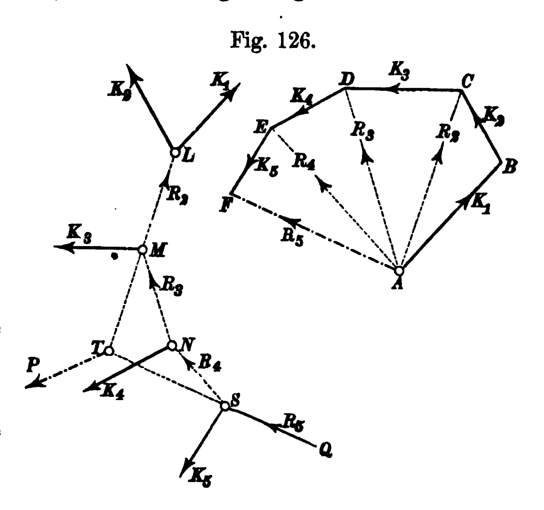
8. Zeichnerische Zusammensetzung von Kräften in einer Ebene.

Haben die Kräfte einen gemeinsamen Schnittpunkt, so findet man ihre Mittelkraft nach Grösse, Richtung und Sinn mittels des **Kraftecks** nach S. 41. Sind die Kräfte aber in einer Ebene zerstreut, so kann man jede an einen beliebigen, gemeinsamen Punkt A der Ebene verschieben, wenn man nur gleichzeitig ein Kräftepaar in der Ebene hinzufügt. Man erhält dann durch Zusammensetzung eine Mittelkraft R und ein Moment $\mathfrak{M}$. Beide lassen sich ersetzen durch eine einzige Kraft R, welche aber gegen den Punkt A um die Länge $l = \mathfrak{M} : R$ parallel verschoben ist. Es wird also Grösse, Richtung und Sinn von R gerade so gefunden, wie bei Kräften mit

gemeinsamem Schnittpunkte, d h. mittels des Kraftecks, nur die Lage der Mittelkraft in der Ebene ist noch besonders zu ermitteln. Dies erfolgt in der Figur der gegebenen Richtungslinien der Kräfte.

In Fig. 126 sind links die Richtungslinien der Kräfte K_1 bis K_5 dargestellt; auf diesen die Kraftgrössen durch bestimmte Längen anzugeben, hat keinen Zweck, weil die Grössen der Kräfte im Krafteck $ABCDEF$ (der rechtsseitigen Figur) erscheinen. Die Lage der Mittelkraft ergiebt sich nun in folgender Weise: Ist L der Schnittpunkt der Richtungslinien von K_1 und K_2, so muss durch diesen auch die Mittelkraft R_2 von K_1 und K_2 hindurchgehen. Ihre Richtung ist durch die Diagonale AC des Kraftecks bestimmt; zieht man also eine Parallele zu dieser durch L, so hat man damit die Lage von R_2. Der Punkt M, in welchem R_2 die Richtungslinie von K_3 schneidet, muss nun auch ein Punkt der Mittelkraft R_3 von R_2 und K_3 (also auch von K_1, K_2 und K_3) sein; zieht man daher $MN \parallel AD$, so ist MN die wahre Richtungslinie von R_3. In derselben Weise legt man durch N eine Parallele zu AE bis zum Schnittpunkte S mit der Kraft K_5 und durch S endlich $SQ \parallel AF$, so ist SQ die Richtungslinie der Mittelkraft R_5 der gegebenen 5 Kräfte.

Fig. 126.



Der Linienzug $LMNSQ$ heisst das Seileck (Seilpolygon) der gegebenen Kräfte, weil er, wie weiter unten gezeigt werden wird, die Gleichgewichtsform eines bei Q befestigten, biegsamen Seiles darstellt, an welchem die Kräfte K_1 bis K_5 in den Knotenpunkten L, M, N und S angreifen.

Es ist besonders zu beachten, dass in der Seileckfigur keine Kraftgrössen dargestellt sind, sondern nur Richtungslinien von Kräften. Die Grösse der Kräfte findet man im Krafteck.

Wie man im Krafteck nicht nur die Mittelkraft aller gegebenen Kräfte, sondern mit Hülfe der Diagonalen auch die Mittelkraft von jeder anderen Theilgruppe auf einander folgender Kräfte nach Grösse, Richtung und Sinn findet, so bestimmt das Seileck auch deren Lagen mittels der Schnittpunkte der Seileckseiten.

Ist $LMNSQ$ (Fig. 126) ein zu den Kräften K_1 bis K_5 gezeichnetes Seileck (welches man sich durch Hinzufügung weiterer Kräfte noch beliebig fortgesetzt denken kann), so bedeutet irgend eine der Seiten die Richtungslinie der Mittelkraft aller vorausgehenden Kräfte. So ist z. B. R_2 (in LM liegend) mit K_1 und K_2 gleichwerthig, was wir schreiben $R_2 \equiv K_1, K_2$. Ebenso ist irgend eine andere Mittelkraft, z. B. R_5 (in SQ liegend) mit K_1 bis K_5 gleichwerthig, d. h.

$$R_5 \equiv K_1, K_2, K_3, K_4, K_5.$$

Ersetzt man auf der rechten Seite K_1 und K_2 durch R_2, so entsteht

$$R_5 \equiv R_2, K_3, K_4, K_5.$$

K_3, K_4 und K_5 sind 3 im Kraft- und Seileck auf einander folgende Kräfte, die zwischen den Seiten LM und SQ liegen; bezeichnet man deren Mittelkraft (die im entsprechenden Krafteck leicht als die Diagonale CF nach Grösse, Richtung und Sinn zu finden ist) mit P, und ersetzt K_3, K_4 und K_5 durch diese, so wird $R_5 \equiv R_2, P$. Wenn aber eine Kraft die Mittelkraft zweier anderen R_2 und P ist, so müssen alle 3 einen gemeinsamen Schnittpunkt haben, und weil der Schnittpunkt T von R_2 und R_5, d. h. der Schnittpunkt der Seiten LM und SQ gegeben ist, so muss auch die Mittelkraft P durch diesen Punkt T gehen; oder: **Die Mittelkraft mehrerer im Seileck auf einander folgenden Kräfte geht durch den Schnittpunkt der diese Kräfte einschliessenden Seilseiten.**

Die erste Kraft K_1 im Seileck kann man sich auch schon als Mittelkraft etwaiger vorausgehender Kräfte denken; es kann daher die Richtungslinie der ersten Kraft auch schon als eine Seite des Seilecks im Sinne des obigen Satzes aufgefasst werden. Die Mittelkraft von K_2 und K_3 muss hiernach z. B. durch den Schnittpunkt von K_1 mit MN gehen.

Diese Eigenschaft der Schnittpunkte der Seileckseiten ist von besonderer Wichtigkeit für die Zusammensetzung von Kräften, welche

so liegen, dass ihre Schnittpunkte für die Zeichnung nicht bequem oder überhaupt nicht benutzbar sind. In solchem Falle würde das auf S. 118 beschriebene Verfahren zur Zeichnung eines Seilecks, welches in dem Schnittpunkte L zweier Kräfte beginnt, nicht anwendbar sein. Diese Schwierigkeit kann man nun aber umgehen, indem man der gegebenen Kräftegruppe K_1 bis K_5 irgend eine beliebig gewählte Kraft T, welche K_1 in einem passenden Punkte L schneidet, vorausgehen lässt.

Sind also K_1, K_2, K_3 gegeben (Fig. 127), welche das Krafteck $ABCD$ mit AD als Mittelkraft R_3 liefern, so wählt man, weil

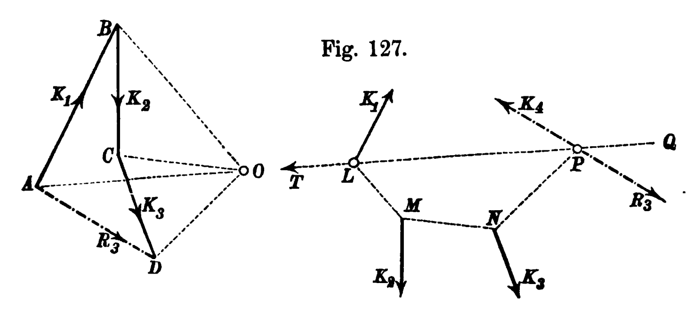


Fig. 127.

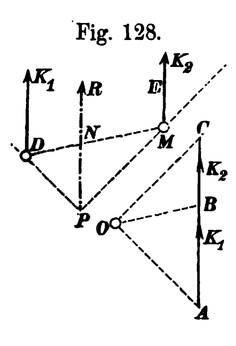
in der rechtsseitigen Lagenfigur der Kräfte ein bequemer Schnittpunkt irgend zweier der gegebenen Kräfte nicht vorliegt, auf K_1 einen Punkt L und legt durch diesen eine Kraft T von beliebiger Grösse und Richtung, im Krafteck durch OA dargestellt. Es ist nun O der Anfangspunkt des gesammten Kräftezuges; die Mittelkraft von T und K_1 wird durch die Strecke OB dargestellt und muss durch L hindurch gehen. Zieht man also $LM \parallel OB$, so ist LM die auf T und K_1 folgende Seileckseite. Ebenso zieht man $MN \parallel OC$, $NP \parallel OD$. Die Mittelkraft R_3 von K_1, K_2 und K_3 muss nun nach S. 119 durch den Schnittpunkt der diese Kräfte einschliessenden Seiten des Seilecks gehen, wobei die erste Kraft T als die der Kräftegruppe vorausgehende Seite zu betrachten ist, während NP auf die Gruppe folgt. Die Richtung von T schneidet NP in P, so dass R_3 durch P gelegt werden muss, u. zw. parallel mit AD. Der Punkt O heisst der Pol des Kraftecks, die von ihm ausgehenden Geraden nach den Endpunkten der gegebenen Kräfte heissen Polstrahlen.

$K_4 = -R_3$ bedeutet diejenige Kraft, welche K_1, K_2 und K_3 aufheben würde.

Das vorstehend beschriebene Verfahren lässt sich selbstverständlich auch auf Parallelkräfte anwenden. Der Kräftezug der gegebenen Kräfte im Krafteck wird dann zu einer Geraden.

Soll die Mittelkraft von nur 2 aufwärts gerichteten Parallelkräften K_1 und K_2 gesucht werden (Fig. 128), von denen K_1 durch einen Punkt D geht, während K_2 rechts davon bei E liegt, so zeichne man aus $AB = K_1$ und $BC = K_2$ das Krafteck. Wählt man dann den beliebigen Pol O (etwa der Mitte von AC gegenüber), so bedeutet OA die hinzugefügte Kraft T, deren Lage man durch den Punkt D führen kann. DP ist dann die Richtungslinie der ersten Seileckseite, $DM \parallel OB$ die zweite, $MP \parallel OC$ die dritte. Durch den Schnittpunkt P der ersten und dritten Seite geht die Mittelkraft R.

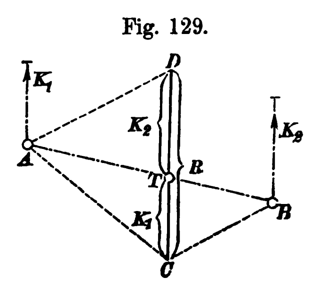
Fig. 128.



Schneidet R die Seite DM im Punkt N, so ist $DNP \backsim OAB$, mithin $DN : NP = OB : AB = OB : K_1$; ebenso wird $MN : NP = OB : K_2$, also $DN : MN = K_2 : K_1$, übereinstimmend mit S. 103.

Soll umgekehrt eine Kraft R, welche nach Grösse, Richtung, Sinn und Lage durch CD (Fig. 129) gegeben ist, in zwei parallele Seitenkräfte K_1 und K_2 zerlegt werden, deren Lagen durch A und B gehen sollen, so kann man den Punkt A als Pol und CD als Kräftezug des Kraftecks benutzen. AC und AD sind dann die äussersten Polstrahlen, während der mittlere noch unbekannt ist. AC ist zugleich die erste Seite des Seilecks, $CB \parallel AD$ die letzte. Dadurch ist als mittlere Seite des Seilecks AB gefunden, und weil A der Pol, so ist AB zugleich der verlängerte mittlere Polstrahl, der CD in dem Punkte T schneidet. T theilt sodann die Kraft $R = CD$ in $CT = K_1$, welche bei A liegt, und in $TD = K_2$, welche durch B geht.

Fig. 129.

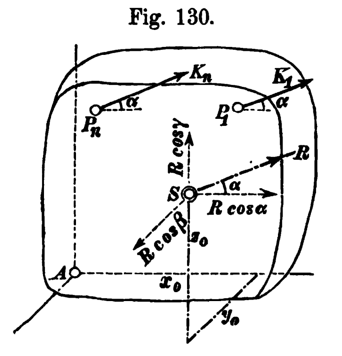


9. Zusammensetzung von Parallelkräften gleichen Sinnes im Raume.

Ist (Fig. 130)
$$\begin{aligned} a_1 &= a_2 \ldots = a_n = a, \\ \beta_1 &= \beta_2 \ldots = \beta_n = \beta, \\ \gamma_1 &= \gamma_2 \ldots = \gamma_n = \gamma, \end{aligned}$$
so wird nach S. 112
$$X = \cos a \,\Sigma K; \quad Y = \cos\beta\,\Sigma K; \quad Z = \cos\gamma\,\Sigma K,$$
$$\text{mithin } R = \Sigma K$$
für die bei der Zurückführung auf den Punkt A sich ergebende Einzelkraft. Ausserdem entstehen nach S. 114 die Achsenmomente:
$$\begin{aligned} \mathfrak{M}_x &= \cos\gamma\,\Sigma Ky - \cos\beta\,\Sigma Kz, \\ \mathfrak{M}_y &= \cos a\,\Sigma Kz - \cos\gamma\,\Sigma Kx, \\ \mathfrak{M}_z &= \cos\beta\,\Sigma Kx - \cos a\,\Sigma Ky. \end{aligned}$$

Die Parallelkräfte müssen sich aber auch auf eine Kraft $R = \Sigma K$ ohne Achsenmoment zurückführen lassen; denn wenn man die Parallelkräfte der Reihe nach vereinigt, gelangt man stets zu einer Einzelkraft; es kommt nur noch darauf an, deren Lage aufzufinden. Ein Punkt S derselben werde durch die unbekannten Koordinaten x_0, y_0, z_0 bezeichnet. Diese durch den Punkt S gehende Einzelkraft R muss nun gleichwerthig sein mit dem Ergebnisse der ersten Zusammensetzung mit Hülfe des Punktes A, oder, weil die Achsenmomente nach S. 114 gleichbedeutend sind mit den statischen Momenten der Kräfte in Bezug auf die Koordinatenachsen, so muss die in S angreifende Kraft R, welche in die Seitenkräfte $R \cos a$, $R \cos\beta$, $R \cos\gamma$ zerlegt werden kann, die statischen Momente $\mathfrak{M}_x$, $\mathfrak{M}_y$, $\mathfrak{M}_z$ haben. In Bezug auf AX hat $R \cos\gamma$ das Moment $R \cos\gamma\, y_0$, $R \cos\beta$ das Moment $-R\cos\beta\, z_0$, $R \cos a$ das Moment Null. Daher muss sein:

Fig. 130.



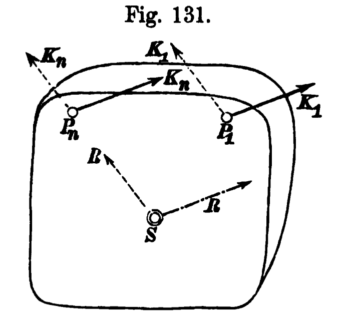
$$\begin{aligned} R\cos\gamma\, y_0 - R\cos\beta\, z_0 &= \cos\gamma\,\Sigma Ky - \cos\beta\,\Sigma Kz; \\ R\cos a\, z_0 - R\cos\gamma\, x_0 &= \cos a\,\Sigma Kz - \cos\gamma\,\Sigma Kx; \\ R\cos\beta\, x_0 - R\cos a\, y_0 &= \cos\beta\,\Sigma Kx - \cos a\,\Sigma Ky. \end{aligned}$$

Diesen Gleichungen wird genügt durch $R x_0 = \Sigma K x$; $R y_0 = \Sigma K y$; $R z_0 = \Sigma K z$; denn durch Einsetzung dieser Werthe werden beide Seiten der drei Gleichungen einander gleich. Die Koordinaten des Punktes S werden hiernach

$$1)\qquad x_0 = \frac{\Sigma K x}{\Sigma K};\quad y_0 = \frac{\Sigma K y}{\Sigma K};\quad z_0 = \frac{\Sigma K z}{\Sigma K}.$$

Da diese Werthe ganz unabhängig von den Richtungswinkeln α, β, γ der gegebenen Kräfte, nur abhängig sind von den Kraftgrössen K und von den auf ihren Richtungslinien gewählten Angriffspunkten (der Koordinaten x, y, z), so bleibt S unverändert, wenn die Parallelkräfte K sich um die Angriffspunkte P drehen. Während einer solchen Drehung der gegebenen Parallelkräfte (Fig. 131) dreht sich also die Mittelkraft $R = \Sigma K$ um den Punkt S, welcher aus diesem Grunde der Mittelpunkt der in den Punkten P angreifenden Parallelkräfte heisst.

Fig. 131.



10. Mittelpunkt der Massen (Schwerpunkt) eines starren Körpers.

Es möge die Gruppe der Parallelkräfte gleichen Sinnes derartig über die Masse des Körpers vertheilt sein, dass an jedem Massentheilchen eine der Masse verhältnisgleiche Kraft angreife. Dann können die an den Massentheilchen m_1, m_2 . . . m_n auftretenden Kräfte geschrieben werden: $m_1 p$; $m_2 p$ . . . $m_n p$. Es würde dann p die gemeinsame Beschleunigung sein, welche die Massentheilchen durch die Kräfte erfahren würden.

Die Absisse des Mittelpunktes S dieser Parallelkräfte ist dann $x_0 = \dfrac{\Sigma m p x}{\Sigma m p}$; die Bedeutung der Σ-Zeichen erhellt aus der Form:

$$x_0 = \frac{m_1 p x_1 + m_2 p x_2 + \ldots m_n p x_n}{m_1 p + m_2 p + \ldots x m_n p};$$

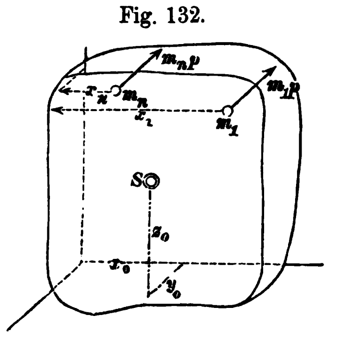
hierin hebt sich dann p als gemeinsamer Faktor im Zähler und Nenner fort, und es bleibt:

$$x_0 = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \ldots + m_n x_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n} = \frac{\Sigma m x}{\Sigma m}.$$

$$\text{Ebenso } y_0 = \frac{\Sigma m y}{\Sigma m}; \quad z_0 = \frac{\Sigma m z}{\Sigma m}.$$

Der so gefundene Mittelpunkt S ist ganz unabhängig von der Beschleunigung p, d. h. von der Grösse der Kräfte, er wird lediglich bedingt durch die Massen der einzelnen Theilchen und ihre Koordinaten, d. h. durch die Massenvertheilung des Körpers. Der Mittelpunkt solcher Kräfte, die sich gleichmässig über die Masse eines Körpers vertheilen, heisst deshalb der **Massenmittelpunkt des Körpers**.

Fig. 132.



Einen besonderen Fall solcher Kräfte bilden z. B. die Schwerkräfte. Bei solchen ist $p = g$ und die Richtung lothrecht abwärts. Der Massenmittelpunkt eines Körpers ist daher auch der Mittelpunkt der Schwerkräfte und heisst deshalb der **Schwerpunkt**. Wird der mit dem Achsenkreuze fest verbundene Körper gegen die Richtung des Lothes verdreht, so bleiben für jeden Massenpunkt die Werthe m, x, y und z unverändert, die Richtungen der Kräfte aber bleiben lothrecht und verdrehen sich dabei gegen das Achsenkreuz. Diese Verdrehung hat aber auf den Schwerpunkt S keinen Einfluss.

Der Schwerpunkt eines Körpers ist der Durchschnittspunkt der verschiedenen Richtungslinien des Gesammtgewichtes des Körpers bei verschiedenen Drehlagen desselben.

Nennt man die Gesammtmasse Σm des Körpers einfach M, so ist das Gesammtgewicht Mg, und dieses geht immer durch den Schwerpunkt S hindurch, wie auch der Körper bewegt werden mag.

Die Gleichungen für die Koordinaten des Schwerpunktes kann man auch schreiben:

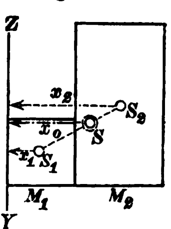
$$1) \qquad \boldsymbol{\Sigma m x = M x_0; \ \Sigma m y = M y_0; \ \Sigma m z = M z_0.}$$

Der Ausdruck $\Sigma m x$ wird erhalten, indem man jedes Massentheilchen m mit seinem Abstande von der yz-Ebene multiplicirt und diese Produkte zusammenzählt. Ein Produkt dieser Art, mx, heisst das statische Moment der Masse m in Bezug auf die yz-Ebene; Mx_0, bei dem man sich die ganze Masse des Körpers im Schwerpunkte vereinigt denkt, heisst das statische Moment der ganzen Masse. Dieselben Beziehungen, welche für die yz-Ebene gelten, sind auch für die anderen Koordinaten-Ebenen gültig, und weil die Koordinaten-Ebenen ganz willkürlich angenommen werden können, so gelten sie überhaupt für jede Ebene. Daher folgt der Satz:

Das statische Moment der ganzen Masse eines Körpers ist gleich der Momentensumme der einzelnen Theile in Bezug auf irgend eine Ebene.

Kann man die Masse eines Körpers in zwei Theile M_1 und M_2 zerlegen, deren Schwerpunkte S_1 und S_2 schon bekannt sind, also auch deren Koordinaten x_1, y_1, z_1 bezw. x_2, y_2, z_2 (Fig. 133), so ist der Beitrag der Masse M_1 zur Momentensumme $\Sigma m x$ nach vorstehendem Satze $M_1 x_1$, derjenige der Masse M_2 aber $M_2 x_2$, und es wird

Fig. 133.



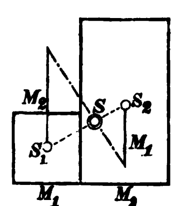
2) $$(M_1 + M_2)\, x_0 = M_1\, x_1 + M_2\, x_2.$$

Stellt die Gerade YZ die zur Bildebene rechtwinklige yz-Ebene dar, so ergiebt sich ferner leicht, dass der Gesammtschwerpunkt S auf der Geraden $S_1 S_2$ liegen muss. Denn denken wir uns die Richtung der Schwere rechtwinklig zur Zeichenebene, so bilden $M_1 g$ und $M_2 g$ zwei Parallelkräfte, deren Mittelkraft in ihrer Ebene (mit der Spur $S_1 S_2$) liegen muss. Dreht sich die Richtung der Schwere, so drehen sich $M_1 g$ und $M_2 g$ um S_1 und S_2, ihre gemeinsame Ebene dreht sich um $S_1 S_2$, daher muss S in $S_1 S_2$ liegen. Ist also der Körper in zwei Massentheile M_1 und M_2 zerlegt, so genügt schon die eine Gleichung für x_0 zur Bestimmung von S auf $S_1 S_2$. Da bei der Zusammensetzung zweier Parallelkräfte gleichen Sinnes die Mittelkraft zwischen beiden liegt, und ihre Abstände von den beiden Kräften sich umgekehrt verhalten wie die Kräfte, so ist das Verhältnis dieser Abstände:

$$SS_1 : SS_2 = M_2 g : M_1 g = M_2 : M_1.$$

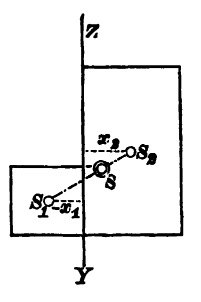
Hiernach kann man S leicht finden, indem man (Fig. 134) durch S_1 und S_2 beliebige Parallelen zieht und auf ihnen die Grössen M_2 bezw. M_1 (d. h. die vertauschten Massen) als Längen nach entgegengesetzten Seiten aufträgt. Die Verbindungsgerade der Endpunkte schneidet dann $S_1 S_2$ in S.

Fig. 134.



Legt man die yz-Ebene so, dass die Theilschwerpunkte zu beiden Seiten der Ebene liegen (Fig. 135), so haben x_1 und x_2 verschiedenes Vorzeichen, und es ist $Mx_0 = M_2 x_2 - M_1 x_1 = \Sigma m x$. Ist die yz-Ebene dann noch so gelegt, dass $M_1 x_1 = M_2 x_2$, so wird $Mx_0 = \Sigma m x = 0$, mithin $x_0 = 0$, d. h. der Schwerpunkt liegt in der xy-Ebene, daher der vielfach anzuwendende Satz:

Fig. 135.



In Bezug auf eine den Schwerpunkt eines Körpers enthaltende Ebene ist die Momentensumme seiner Massentheile gleich Null, und umgekehrt.

Ein Körper, dessen Masse M sich gleichförmig über seinen Rauminhalt V vertheilt, heisst homogen. Das Gewicht γ der Raumeinheit (des Kubikmeters) heisst (S. 55) die Dichte des Körpers; diese ist bei einem homogenen Körper überall gleich. Das Gewicht des ganzen Körpers ist $Mg = \gamma V$, das eines Raumtheilchens dV ebenso $mg = \gamma dV$; mithin sind die Massen $M = V\gamma : g$ bezw. $m = dV\gamma : g$. In den Gleichungen für den Schwerpunkt heben sich dann die allen Gliedern gemeinsamen Faktoren $\gamma : g$ fort, und es bleibt

3) $$Vx_0 = \int dV \cdot x,$$

indem statt des Zeichens Σ hier das gleichbedeutende $\int$-Zeichen gesetzt ist.

Eine Ebene, die einen homogenen Körper in zwei symmetrische Hälften theilt, enthält den Schwerpunkt, weil in Bezug auf sie $\int dV \cdot x = 0$ ist.

Schwerpunkte von Linien. Hat der homogene Körper die Gestalt eines dünnen Stabes von überall gleichem Querschnitt F, so ist, wenn die Länge des Stabes s, diejenige eines Theilchens ds,

$V = Fs$, $dV = F ds$. Es hebt sich dann der gemeinsame Querschnitt F in allen Gliedern fort, und man hat für einen solchen Stab, den man materielle Linie nennt:

4) $$s x_0 = \int ds \cdot x;$$

und für die anderen Richtungen entsprechend.

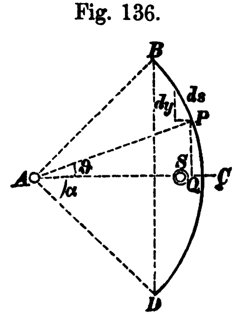
Der Schwerpunkt einer geraden Linie liegt selbstverständlich in der Mitte.

Bei einer gebrochenen Linie kennt man die Schwerpunkte S_1, S_2 der einzelnen Theile und deren Koordinaten. Es ist dann $(s_1 + s_2 + \ldots) x_0 = s_1 x_1 + s_2 x_2 + \ldots$

Der Schwerpunkt eines Kreisbogens vom Halbmesser r und dem Centriwinkel 2α liegt auf der Mittellinie (Fig. 136), zu suchen ist nur $AS = x_0$. Das Theilchen $ds = r d\vartheta$, bei P gelegen, hat von der durch A gelegten lothrechten yz-Ebene den Abstand $x = AQ = r\cos\vartheta$. Es ist $s = 2r\alpha$, und es gilt die Gleichung

$$2r\alpha x_0 = r^2 \int_{-\alpha}^{+\alpha} \cos\vartheta \, d\vartheta.$$

Fig. 136.



Denn zählt man den positiven Winkel ϑ nach oben, so entspricht dem unteren Endpunkte D der Winkel $\vartheta = -\alpha$. Jedoch sind die Beiträge der beiden Hälften des Bogens zur Momentensumme gleich gross, so dass man zwischen $\vartheta = 0$ und $\vartheta = \alpha$ integriren und das Ganze mit 2 multipliciren kann. Weil aber $d \sin\vartheta = \cos\vartheta \, d\vartheta$, so ist $\int \cos\vartheta \, d\vartheta = \sin\vartheta$, also

$$2r\alpha x_0 = 2r^2 \Big[\sin\vartheta\Big]_0^\alpha = 2r^2 \sin\alpha, \text{ oder}$$

5) $$x_0 = r\frac{\sin\alpha}{\alpha} = r\frac{2r\sin\alpha}{2r\alpha}.$$

Weil nun $2r\sin\alpha$ = der Sehne BD, $2r\alpha$ = dem Bogen BD, so kann das Ergebnis auch geschrieben werden:

$$x_0 : r = \text{Sehne} : \text{Bogen}.$$

Für einen sehr kleinen Bogen ist die Sehne gleich dem Bogen, daher $x_0 = r$; für einen Halbkreisbogen aber $\alpha = \frac{1}{2}\pi$; $\sin\alpha = 1$, mithin $x_0 = \frac{2}{\pi} r$ (annähernd $\frac{2}{3} r$).

Schwerpunkte von Flächen. Hat der homogene Körper die Gestalt einer ebenen oder gekrümmten Platte F von überallgleicher Dicke δ, so wird $V = \delta F$, $dV = \delta\, dF$, mithin

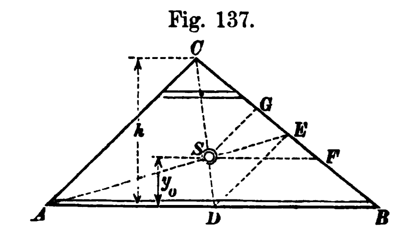
6) $$F x_0 = \int dF\, x.$$

Eine solche Platte nennt man eine materielle Fläche.

Der Schwerpunkt der Fläche eines regelmässigen Vielecks liegt natürlich im Mittelpunkte.

Eine **Dreieckfläche** (Fig. 137) lässt sich in sehr viele Streifen, parallel zur Grundlinie AB, zerlegen. Weil deren Schwerpunkte sämmtlich auf der Mittellinie CD liegen, so muss diese auch den Schwerpunkt S der ganzen Fläche enthalten. Mit demselben Rechte gilt dieses von der Mittellinie AE. Folglich muss der Schnittpunkt der Mittellinien der Schwerpunkt S sein.

Fig. 137.



Da das Dreieck nur einen Schwerpunkt haben kann, so liegt hierin nebenbei der Beweis des geometrischen Satzes, dass die 3 Mittellinien eines Dreiecks sich in einem Punkte schneiden. Wegen den innigen Beziehungen zwischen Geometrie und Mechanik kommt es nicht selten vor, dass Sätze der Mechanik in einfacher Weise zur Lösung geometrischer Aufgaben benutzt werden können.

Zieht man DE, so findet man leicht, dass $DE \parallel AC$ und $DE = \frac{1}{2} AC$, daher in den ähnlichen Dreiecken SAC und SED:

$$SC : SD = AC : DE = 2 : 1,$$

oder es liegt S im unteren Drittelpunkte der Mittellinie CD. Nennt man h das Höhenloth von C auf AB, y_0 das Loth von S, so wird offenbar

7) $$y_0 = \frac{1}{3} h.$$

Zieht man $SF \parallel AB$, so muss auch $BF = \frac{1}{3} BC$ sein, und ebenso, wenn $SG \parallel AC$, auch $CG = \frac{1}{3} BC$. Man kann daher S auch bestimmen, indem man BC in 3 gleiche Theile zerlegt, durch den Theilpunkt F eine Parallele zur nächsten Seite AB, durch den Theilpunkt G eine Parallele zur nächsten Seite CA zieht. Beide schneiden sich dann in S.

Das Trapez lässt sich, wie das Dreieck, in lauter Streifen, parallel den Grundlinien a und b zerlegen, weshalb der Schwerpunkt auf der Mittellinie des Trapezes liegen muss. Um seine Höhenlage zu finden, zerlege man das Trapez (Fig. 138) durch eine Diagonale in zwei Dreiecke

$$ACD = F_1, \; ABC = F_2.$$

Fig. 138.

Von $AB = a$ aus gemessen, sind dann die Höhenabstände der Theilschwerpunkte $y_1 = {}^2/_3\, h$; $y_2 = {}^1/_3\, h$. Nach der Gleichung

$$F y_0 = F_1 y_1 + F_2 y_2$$

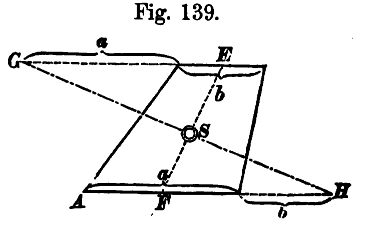
wird dann

$$^1/_2\,(a + b)\, h\, y_0 = {}^1/_2\, b h \cdot {}^2/_3\, h + {}^1/_2\, a h \cdot {}^1/_3\, h \quad \text{oder}$$

8) $$(a + b) y_0 = \frac{h}{3}(2b + a) \quad \text{und} \quad y_0 = \frac{h}{3}\,\frac{a + 2b}{a + b}.$$

Zur geometrischen Konstruktion (Fig. 139) verlängert man die Seite b um a, die Seite a nach der anderen Richtung um b. Die Verbindungsgerade der Endpunkte der Verlängerungen schneidet dann die Mittellinie in S. Es is nämlich in den ähnlichen Dreiecken SEG und SFH

Fig. 139.



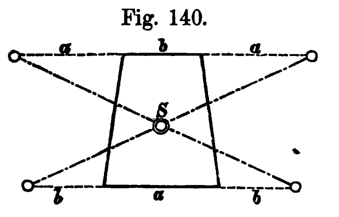
$$SF : SE = FH : EG = (b + {}^1/_2\, a) : (a + {}^1/_2\, b) = (a + 2b) : (2a + b),$$

mithin $SF : EF = SF : (SE + SF)$ oder

$$SF : EF = (a + 2b) : (a + 2b + 2a + b) = (2b + a) : 3(a + b).$$

Dies stimmt mit dem Verhältnis $y_0 : h$ überein, mithin ist die Konstruktion richtig. Trägt man aber die Verlängerung a nach rechts, die Verlängerung b nach links auf (Fig. 140), so muss das Ergebnis das gleiche sein. Man braucht daher die Mittellinie gar nicht, sondern verlängert b nach beiden Seiten um a, a nach beiden Seiten um b, verbindet die Endpunkte der Verlängerungen kreuzweise, so schneiden sich die Verbindungsgeraden in S.

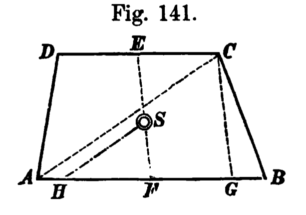
Fig. 140.



Obige sehr einfache Konstruktion beansprucht viel seitlichen Raum. Sollen die Konstruktionslinien ganz innerhalb des Trapezes

bleiben, so kann man folgende Eigenschaft des Schwerpunktes S benutzen: Nach obigem liegt S auf der Halbirungslinie, u. zw. ist $SF : EF = (2b + a) : 3(a + b)$. Man ziehe (Fig. 141) die Diagonale AC und dazu durch S eine Parallele SH. Zieht man dann noch $CG \parallel EF$, so ist $\Delta HSF \sim ACG$. Mithin $HF : AG = SF : CG$ und wegen $CG = EF$:

Fig. 141.



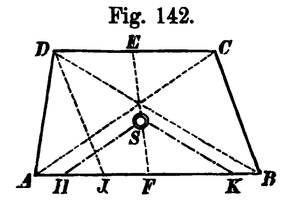
$$\frac{HF}{AG} = \frac{SF}{EF} = \frac{2b + a}{3(a + b)}.$$

Weil aber $AG = \frac{1}{2}(a + b)$, so wird

$$HF = \frac{2b + a}{3(a + b)} \frac{a + b}{2} = \frac{2b + a}{6} = \frac{b}{3} + \frac{a}{2} - \frac{a}{3} = \frac{a}{2} - \frac{a - b}{3}.$$

Da nun $AF = \frac{1}{2}a$, so muss $AH = \frac{1}{3}(a - b)$ sein. Man ziehe also (Fig. 142) $DJ \parallel CB$, so dass $AJ = a - b$, theile dieses in 3 gleiche Theile, dann ist $AH = \frac{1}{3}(a - b)$. Nun zieht man durch H eine Parallele zur Diagonale AC, so schneidet diese Parallele die Mittellinie EF in S. Macht man $BK = AH = \frac{1}{3}(a - b)$, so muss eine durch K gezogene Parallele zur anderen Diagonale BD mit demselben Rechte durch S gehen. Zieht man also diese Parallele KS durch K, so kann man die Mittellinie entbehren.

Fig. 142.



Dieses Verfahren rührt von Prof. G. Lang (Rigaische Industrie-Ztg. 1883, S. 126) und Prof. Rob. Land (Centralblatt der Bauverwaltung 1894, S. 458) her. Vergl. auch Zeitschrift des Hannov. Arch.- und Ing.-Vereins 1895, S. 115—117.

Schwerpunkt eines beliebigen Vierecks. Man theilt das Viereck (Fig. 143) durch die Diagonale BD in 2 Dreiecke, halbirt die Diagonale in M, zieht AM und CM, so liegen auf diesen die Theilschwerpunkte S_1 und S_2 mit $MS_1 = \frac{1}{3} MA$; $MS_2 = \frac{1}{3} MC$. Aus diesen Verhältnissen folgt, dass $S_1 S_2 \parallel AC$ sein muss. Theilt man das Viereck ein zweites Mal durch die Diagonale AC, so ergeben sich die Theilschwerpunkte S_3 und S_4, u. zw. muss die Verbindungsgerade $S_3 S_4 \parallel BD$ sein, geradeso wie $S_1 S_2 \parallel AC$ war. Der Gesammtschwerpunkt S des Vierecks muss nun im Schnitte

von $S_1 S_2$ mit $S_3 S_4$ liegen. Zieht man nun durch D und C Parallelen zu AC bezw. BD, und schneiden sich diese in F, so muss die Verbindungsgerade EF durch S gehen, und es muss $ES = \frac{1}{3} EF$ sein, da $ES_1 = \frac{1}{3} ED$, $ES_4 = \frac{1}{3} EC$, $S_1 S \parallel DF$, $S_4 S \parallel CF$. Denkt man sich aber AF und BF gezogen, so würde der Schwerpunkt eines Dreiecks ABF im unteren Drittelspunkte von EF liegen, d. h. mit S zusammenfallen. Hiernach ist der Schwerpunkt des Vierecks $ABCD$ gleichbedeutend mit demjenigen des Dreiecks ABF. Um ihn zu finden, ist es in diesem Falle wohl am einfachsten, die Seite AB in drei gleiche Theile zu theilen (Fig. 144), $DF \parallel AC$, $CF \parallel BD$, $GS \parallel AF$, $HS \parallel BF$ zu ziehen.

Fig. 143.

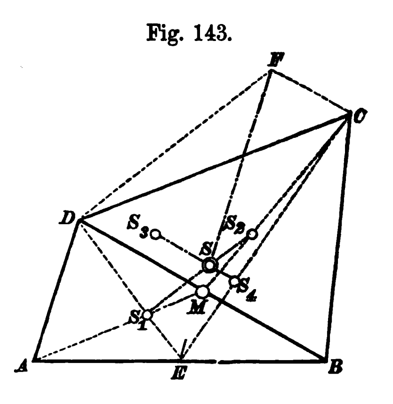
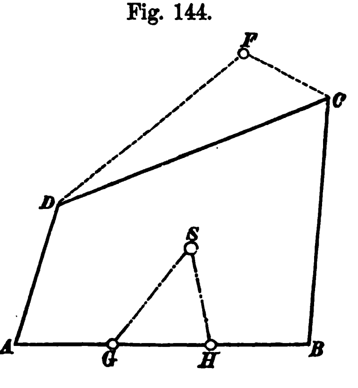


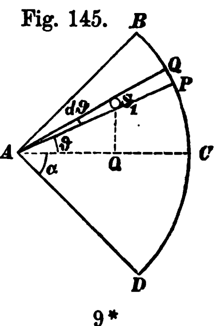
Fig. 144.



Die Theilschwerpunkte S_1 bis S_4 in Fig. 143 haben also nur zur Herleitung des Verfahrens gedient, sind aber für die Ausführung unnöthig.

Dies Verfahren rührt von Prof. Rob. Land (Zeitschrift des Arch.- u. Ing.-Vereins zu Hannover 1895, S. 451) her und kann auch für Trapeze angewendet werden, da es ebenso einfach ist, wie die in Fig. 141 und 142 (S. 130) angegebenen Verfahren.

Fig. 145.



Schwerpunkt des Kreisausschnittes. Schliesst der beliebige Halbmesser AP (Fig. 145) mit der Mittellinie AC den Winkel ϑ ein und ist PQA ein unendlich kleiner Ausschnitt vom Centriwinkel $d\vartheta$, so ist dessen Fläche $dF = \frac{1}{2} r \cdot r\, d\vartheta$; der Theilschwerpunkt S_1 liegt um $\frac{2}{3} r$ von A entfernt und hat die Abscisse $AQ = \frac{2}{3} r \cos \vartheta$. In

Gleichung 6, S. 128 bedeutet dF freilich ein nach zwei Richtungen unendlich kleines Flächentheilchen, doch kann man als Beitrag des Sektors PQA zu dem statischen Momente schreiben $PQA \cdot AQ$. Dann ist

$$F x_0 = \frac{2\,r^3}{3} \int_0^a \cos\vartheta\, d\vartheta = \frac{2}{3}\, r^3 \sin a$$

und, weil $F = 2\,\frac{r^2 a}{2} = r^2 a$,

$$x_0 = \frac{2}{3}\, r\, \frac{\sin a}{a}. \tag{9}$$

Für sehr kleines a ist $x_0 = {}^2/_3\, r$, für die Halbkreisfläche mit $a = {}^1/_2\, \pi$:

$$x_0 = \frac{4}{3}\,\frac{r}{\pi} \quad (\text{rund } {}^2/_5\, r).$$

Schwerpunkt des Ringausschnittes. Der Ringausschnitt ist als Unterschied zweier Kreisausschnitte der Halbmesser R und r anzusehen. Ist S der Schwerpunkt des grossen Ausschnittes von der Fläche F, so ist $AS = x_0$; S_2 sei der Schwerpunkt des kleinen Ausschnittes von der Fläche F_2 mit $AS_2 = x_2$; F_1 sei der Ringausschnitt mit $AS_1 = x_1$. Dann wird

Fig. 146.

$$F x_0 = F_1 x_1 + F_2 x_2, \quad \text{u. zw.}$$

$$F = R^2 a;\quad F_2 = r^2 a;\quad F_1 = (R^2 - r^2)\, a;$$

$$x_0 = \frac{2}{3}\, R\, \frac{\sin a}{a};\quad x_2 = \frac{2}{3}\, r\, \frac{\sin a}{a} \quad \text{und}$$

$$x_1 = \frac{2}{3}\, \frac{R^2 R \sin a - r^2 r \sin a}{(R^2 - r^2)\, a} = \frac{2}{3}\, \frac{R^3 - r^3}{R^2 - r^2}\, \frac{\sin a}{a}.$$

Schwerpunkt der Kreisabschnittfläche. Der Abschnitt F_1 bildet mit dem Dreieck $ABD = F_2$ den Ausschnitt $ABCD = F$. Die entsprechenden Schwerpunkts-Abscissen seien $AS_1 = x_1$, $AS_2 = x_2$; $AS = x_0$. Dann ist

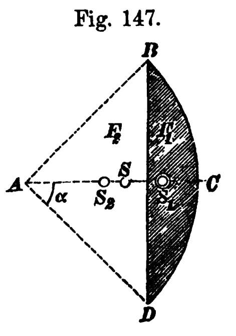


Fig. 147.

$$F x_0 = F_1 x_1 + F_2 x_2,$$

u. zw. $\quad F = r^2 a;\ F_2 = r^2 \sin a \cos a;$

$$F_1 = r^2 (a - \sin a \cos a);$$

$$x_0 = \frac{2}{3} r \frac{\sin \alpha}{\alpha}; \qquad x_2 = \frac{2}{3} r \cos \alpha \quad \text{und}$$

$$x_1 = \frac{r^2 \alpha \frac{2}{3} r \frac{\sin \alpha}{\alpha} - r^2 \sin \alpha \cos \alpha \cdot \frac{2}{3} r \cos \alpha}{r^2(\alpha - \sin \alpha \cos \alpha)}.$$

$$= \frac{2}{3} \frac{r^3 \sin \alpha (1 - \cos^2 \alpha)}{r^2(\alpha - \sin \alpha \cos \alpha)} = \frac{2}{3} \frac{r^3 \sin^3 \alpha}{r^2(\alpha - \sin \alpha \cos \alpha)}.$$

Es ist aber die Sehne $BD = l = 2 r \sin \alpha$, also $r \sin \alpha = \frac{1}{2} l$, mithin $x_1 = \frac{2}{3} \frac{l^3}{8 F_1} = \frac{l^3}{12 F_1}$, wenn F_1 die Fläche des Abschnittes. Man kann auch schreiben

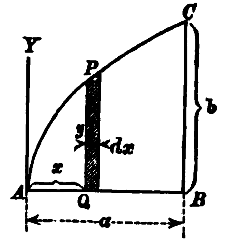
$$x_1 = \frac{2}{3} r \frac{\sin^3 \alpha}{\alpha - \sin \alpha \cos \alpha}.$$

Für $\alpha = \frac{1}{2} \pi$ wird der Abschnitt wieder zur Halbkreisfläche und $x_1 = \frac{4}{3} \frac{r}{\pi}$, wie vom Ausschnitte aus abgeleitet.

Schwerpunkt der halben Parabelfläche. Die Parabel AC (Fig. 148) habe die Gleichung $y^2 = 2 p x$. Für die Koordinaten des Endpunktes C wird dann $b^2 = 2 p a$, und durch Division entsteht

$$\frac{y^2}{b^2} = \frac{x}{a}.$$

Fig. 148.



Die unendlich kleinen Theilchen des Streifens $PQ = y\,dx$ haben gemeinsamen Abstand x von der AY, können daher zu dem Beitrage $y\,dx\,x$ zusammengefasst werden. Die Fläche $ABC = F$ ist

$$\int_0^a y\,dx = \frac{b}{\sqrt{a}} \int_0^a x^{1/2} dx = \frac{b}{\sqrt{a}} a^{3/2} \frac{2}{3} = \frac{2}{3} ab,$$

d. h. $\frac{2}{3}$ von der Fläche des umschriebenen Rechtecks ab. Hiernach wird

$$\frac{2}{3} ab\, x_0 = \int_0^a y\,dx\,x = \frac{b}{\sqrt{a}} \int_0^a x^{3/2} dx$$

$$= \frac{2}{5} \frac{b}{\sqrt{a}} a^{5/2} = \frac{2}{5} b a^2$$

also $x_0 = \frac{3}{5} a$, unabhängig von b.

Zur Auffindung der Ordinate y_0 des Schwerpunktes trenne man einen Streifen ab, dessen Theilchen den gleichen Abstand y von AB haben (Fig. 149). Dann wird

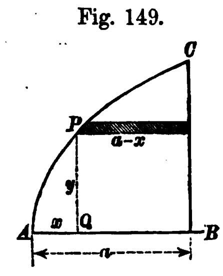


Fig. 149.

$$\frac{2}{3} ab\, y_0 = \int_0^b (a-x)\, dy\, y;$$

dies wird wegen $x : a = y^2 : b^2$:

$$\frac{2}{3} ab\, y_0 = \frac{a}{b^2} \int_0^b (b^2 - y^2)\, y\, dy$$

$$= \frac{a}{b^2} \left\{ b^2 \int_0^b y\, dy - \int_0^b y^3\, dy \right\}$$

$$= \frac{a}{b^2} \left\{ \frac{b^4}{2} - \frac{b^4}{4} \right\} = \frac{ab^2}{4}, \quad \text{mithin } y_0 = \frac{3}{8} b.$$

Man hätte auch als Beitrag des Streifens $y\, dx$ (Fig. 148) zum statischen Momente in Bezug auf AB die Fläche des Streifens mit der Schwerpunktshöhe $1/2\, y$ multiplicirt einführen können, dann wäre

$$\frac{2}{3} ab\, y_0 = \frac{1}{2} \int_0^a y^2\, dx = \frac{1}{2} \frac{b^2}{a} \int_0^a x\, dx = \frac{1}{2} \frac{b^2}{a} \frac{a^2}{2} = \frac{ab^2}{4}$$

entstanden.

Die Koordinaten x_1 und y_1 des Schwerpunktes S_1 der Ergänzungsfigur, welche die Parabelfläche zum Rechteck $ABCD$ ergänzt (Fig. 150), findet man leicht, weil das Rechteck die Schwerpunkts-Koordinaten $x_0 = 1/2\, a$; $y_0 = 1/2\, b$ hat:

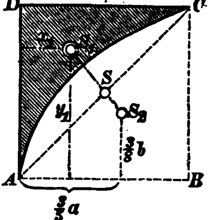


Fig. 150.

$$x_1 \cdot 1/3\, ab + 3/5\, a \cdot 2/3\, ab = 1/2\, a \cdot ab$$

$$x_1 = 3/10\, a.$$

$$y_1 \cdot 1/3\, ab + 3/8\, b \cdot 2/3\, ab = 1/2\, b \cdot ab$$

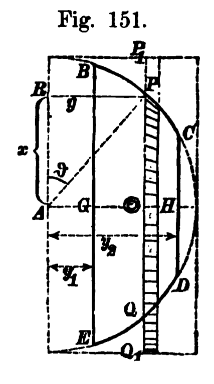
$$y_1 = 3/4\, b.$$

S_1, S und S_2 liegen auf einer Geraden, und es ist $SS_1 = 2 \cdot SS_2$.

Schwerpunkt einer Kugelzonen-Oberfläche. Der unendlich kleine Theil der Oberfläche bei PQ (Fig. 151), entsprechend einem Bogentheilchen ds des äusseren Kreises, hat die Grösse

$dF = ds \cdot 2\pi x$. Nun bildet ds mit dy denselben Winkel ϑ wie $AP = r$ mit $AR = x$. Daraus folgt $ds = dy : \cos\vartheta = dy \cdot r : x$ und $dF = 2r\pi\, dy$, gleich einer Cylinderfläche vom Halbmesser r und der Höhe dy. Diese Cylinderfläche bei $P_1 Q_1$ hat dann dasselbe statische Moment wie die Kugelzonenfläche. Daher muss auch die ganze Zonenfläche $BCDE$ gleiche Fläche, gleiches Moment und gleiche Schwerpunktslage haben mit dem entsprechenden Theile der die Kugel umschliessenden Cylinderfläche. Da der Schwerpunkt der Cylinderfläche in der Mitte der Mittellinie liegt, so liegt auch derjenige der Kugelzone in der Mitte von GH. Die Rechnung führt zu gleichem Ergebnisse:

Fig. 151.

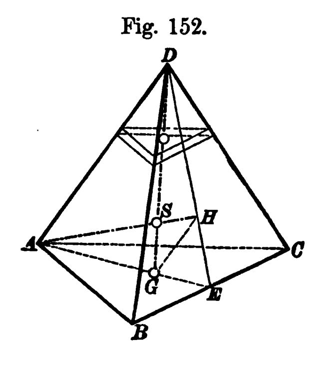


$$2r\pi(y_2 - y_1)y_0 = 2r\pi\int_{y_1}^{y_2} y\, dy = r\pi(y_2^2 - y_1^2);\quad y_0 = \frac{y_2 + y_1}{2}.$$

Gleiches gilt von der Oberfläche der Kugelhaube.

Schwerpunkt des Körpers der dreiseitigen Pyramide. Durch Schnitte, parallel mit der Grundfläche ABC (Fig. 152) lässt sich die Pyramide in dreieckige Scheiben zerlegen, deren Schwerpunkte durchweg auf der Verbindungsgeraden zwischen der Spitze D und dem Schwerpunkte G der Grundfläche liegen. Die Linie DG enthält daher den Gesammtschwerpunkt S. Der Punkt G wird erhalten, indem man BC in E halbirt, AE zieht und $EG = 1/3\ EA$ macht. Betrachtet man in gleicher Weise BCD als Grundfläche, zieht DE mit $EH = 1/3\ DE$, so muss der Schwerpunkt auch auf AH liegen. DG und AH schneiden sich in S. Weil $EG = 1/3\, EA$, $EH = 1/3\, ED$, ist $GH \parallel AD$ und $= 1/3\, AD$. Daher ist $SGH \sim SDA$, $SG = 1/3\, SD = 1/4\, GD$. Theilt man also die Gerade von der Spitze nach dem Schwerpunkte der Grundfläche in 4 gleiche Theile, so ist der der Grundfläche zunächst liegende Theilpunkt der Schwerpunkt S. In demselben Verhältnisse 1 : 4 wie $SG : GD$ stehen auch die Höhenlothe y_0

Fig. 152.

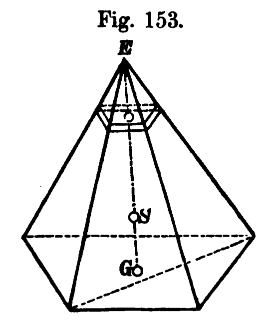


und h, von der Spitze D und dem Schwerpunkte S auf die Grundfläche gefällt;

$$y_0 = {}^1/_4\, h.$$

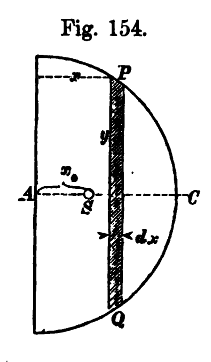
Eine vierseitige Pyramide (Fig. 153) lässt sich in lauter ähnliche und ähnlich liegende Scheiben zerlegen. Daher muss der Gesammtschwerpunkt S wieder liegen auf der Geraden von der Spitze E nach dem Schwerpunkte G der Grundfläche. Zerlegt man die Pyramide in zwei dreiseitige mit der gemeinsamen Spitze E und der Höhe h, so liegt der Schwerpunkt jeder in der Höhe $y_0 = {}^1/_4\, h$ über der Grundfläche, daher auch der Gesammtschwerpunkt S in dieser Höhe $y_0 = {}^1/_4\, h$. Es ist also $GS = {}^1/_4\, GE$. Offenbar gilt dies auch für die Körper vielseitiger Pyramiden und Kegel: der Schwerpunkt liegt im unteren Viertelpunkte der Geraden vom Schwerpunkte der Grundfläche nach der Spitze.

Fig. 153.



Schwerpunkt des Halbkugelkörpers. Schneidet man eine cylindrische Scheibe PQ (Fig. 154) vom Halbmesser y im Abstande x vom Mittelpunkte A heraus, so haben deren Theilchen durchweg den gleichen Abstand x von der durch A gelegten yz-Ebene. Man kann daher den Inhalt der Scheibe zu $dV = y^2 \pi dx$ zusammenfassen mit dem Momente $dVx = y^2 \pi dx\, x$, und hat:

Fig. 154.



$${}^2/_3\, r^3 \pi x_0 = \pi \int_0^r y^2 x\, dx.$$

Um unter dem Integralzeichen eine Differential-Funktion von x zu erhalten, muss man $y^2 = r^2 - x^2$ setzen. Dann wird

$${}^2/_3\, r^3 \pi x_0 = \pi \int_0^r (r^2 - x^2)\, x\, dx = r^2 \pi \int_0^r x\, dx - \pi \int_0^r x^3\, dx$$

$$= {}^1/_2\, r^4 \pi - {}^1/_4\, r^4 \pi = {}^1/_4\, r^4 \pi,$$

also

$$x_0 = {}^3/_8\, r.$$

Satz von Pappus und Guldin. Die Lehre vom Schwerpunkte war schon Archimedes (287—212 v. Chr.) bekannt. Der alexandrinische

Gelehrte Pappus benutzte gegen Ende des dritten oder vierten Jahrhunderts n. Chr. die Schwerpunkte ebener Kurven und Flächen zur Berechnung von Umdrehungsflächen und -Körpern. Der betreffende Satz wurde vom Jesuitenpater Guldin aus St. Gallen 1635 n. Chr. weiter verwerthet und heisst danach der **Satz von Pappus und Guldin.**

1) Dreht sich eine ebene Kurve AB (Fig. 155) um eine in ihrer Ebene liegende Achse CD, so entsteht eine Umdrehungsfläche. Ein Bogentheilchen ds mit dem Drehungshalbmesser x erzeugt eine Fläche $dF = ds\, 2\pi x$. Der Inhalt der ganzen erzeugten Umdrehungsfläche ist daher

Fig. 155.

$$F = 2\pi \int ds\, x.$$

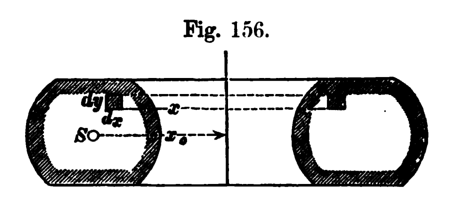
Weil nun nach der Lehre vom Schwerpunkt $\int ds\, x = s x_0$, so wird

$$F = 2\pi x_0 s.$$

Darin bedeutet x_0 den Drehungshalbmesser des Schwerpunktes S der erzeugenden Kurve von der Länge $AB = s$.

2) Dreht sich aber eine ebene Fläche um eine in ihrer Ebene liegende Achse (Fig. 156), so erzeugt ein Flächentheilchen $dF = dx\, dy$ mit dem Halbmesser x einen Kreisring vom Inhalte

Fig. 156.



$$dV = \left\{(x + dx)^2 - x^2\right\}\pi\, dy = d(x^2)\,\pi\, dy$$

$$= 2\, x\, dx\, \pi\, dy = 2\,\pi\, x\, dx \cdot dy = 2\,\pi\, x\, dF.$$

Der ganze Umdrehungskörper wird sonach

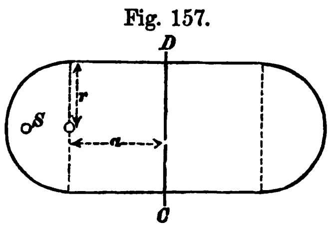
$$V = 2\,\pi \int dF\, x, \text{ oder, weil } \int dF\, x = F x_0,$$

$$V = F\, 2\,\pi\, x_0, \text{ daher der Pappus-Guldin'sche Satz:}$$

Der Inhalt einer Fläche, welche durch Drehung einer ebenen Kurve um eine in ihrer Ebene liegende

Achse entsteht, ist gleich der Länge der Kurve mal dem Drehungswege $2\pi x_0$ ihres Schwerpunktes. — Der Inhalt eines Körpers, welcher durch Drehung einer ebenen Fläche um eine in ihrer Ebene liegende Achse entsteht, ist gleich der Fläche mal dem Drehungswege ihres Schwerpunktes.

Fig. 157.

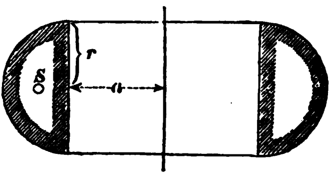


Beispiel: Dreht sich nach Fig. 157 ein Halbkreisbogen um die Achse CD, so ist nach S. 127

$$x_0 = a + 2\frac{r}{\pi}, \text{ mithin } F = r\pi\left(a + 2\frac{r}{\pi}\right)2\pi = 2ra\pi^2 + 4r^2\pi.$$

Der letzte Summand ist die Kugeloberfläche, welche für $a = 0$ entsteht.

Fig. 158.

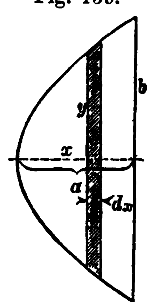


Durch Drehung der Halbkreisfläche entsteht ein Körper (Fig. 158)

$$V = \frac{1}{2}r^2\pi\,2\pi\left(a + \frac{4}{3}\,\frac{r}{\pi}\right)$$
$$= r^2\pi^2 a + \frac{4}{3}r^3\pi.$$

Der letzte Summand bezeichnet den Inhalt des Kugelkörpers, welcher für $a = 0$ entsteht.

Fig. 159.



Beispiel: Der Inhalt eines Umdrehungs-Paraboloids (Fig. 159) ist leicht zu finden zu

$$V = \int y^2\pi\,dx = \pi\,\frac{b^2}{a}\int_0^a x\,dx = \frac{\pi b^2 a}{2},$$

gleich der Hälfte des umschliessenden Cylinders. Daraus lässt sich nun die Schwerpunkts-Ordinate y_0 der halben Parabelfläche berechnen:

$$\tfrac{1}{2}b^2 a\pi = \tfrac{2}{3}ab\,2\pi y_0,$$

mithin $y_0 = \tfrac{3}{8}b$, wie auf S. 134 gefunden.

II. Arbeit der Schwerkräfte an einer beliebigen Massengruppe.

Der Schwerpunkt wurde im Vorhergehenden als der Mittelpunkt der Schwerkräfte eines starren Körpers, oder sonstiger, über die Masse eines starren Körpers gleichmässig vertheilter Massenkräfte gleichen Sinnes bezeichnet. Aber auch für Körper veränderlicher Form, ja selbst für beliebige Gruppen von Massen (mit oder ohne

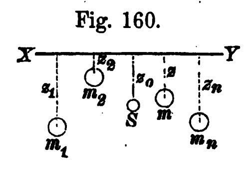
gegenseitige Verbindung) nennt man den irgend einer gegenseitigen Lage der Massentheilchen entsprechenden Punkt mit der Eigenschaft:

$$x_0 = \frac{\Sigma m x}{\Sigma m}, \quad y_0 = \frac{\Sigma m y}{\Sigma m}; \quad z_0 = \frac{\Sigma m z}{\Sigma m}$$

den Massenmittelpunkt oder Schwerpunkt.

Sind $m_1, m_2, \ldots m_n$ (Fig. 160) einzelne Massenpunkte oder einzelne starre Körper, die zusammen einen starren, oder einen der Form nach veränderlichen Körper, oder eine beliebige Massengruppe bilden, und wirkt auf diese die Schwere in der Richtung der z-Achse, so verrichtet die Schwere bei einer unendlich kleinen Verrückung, bei der sich ein Massentheil m so bewegt, dass z um dz zunimmt, eine Arbeit $mg \cdot dz$. Die Arbeitssumme der Schwerkräfte an allen Massentheilchen ist dann

Fig. 160.



$$d\mathfrak{A} = g(m_1 dz_1 + m_2 dz_2 + \ldots + m dz) = g \Sigma m dz.$$

Nun ist aber $m_1 z_1 + m_2 z_2 + \ldots + m z = \Sigma m z = z_0 \Sigma m$, also, weil bei einer Verrückung die Massen m unveränderlich, die z-Werthe aber veränderlich, $\Sigma m dz = dz_0 \Sigma m$; mithin ist

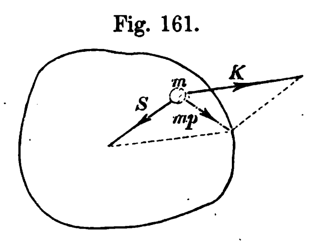
$$d\mathfrak{A} = g dz_0 \Sigma m = dz_0 \Sigma m g.$$

Die Arbeitssumme der Schwerkräfte an einer beliebigen Massengruppe berechnet sich gerade so, als ob die ganze Masse Σm der Gruppe in ihrem Schwerpunkte zu einem Massenpunkte vereinigt wäre.

12. Der Satz d'Alembert's.

Greift an einem Punkte m einer Massengruppe (Fig. 161) eine äussere Kraft K an, so würde der Punkt, wenn er frei wäre im Sinne von K eine Beschleunigung $K:m$ erfahren. Die übrigen Punkte der veränderlichen oder unveränderlichen Massengruppe werden aber ebenfalls auf die Bewegung von m einwirken, also Kräfte, die sog. inneren Kräfte auf m ausüben, deren Mittelkraft S sein möge. Durch S ist der Einfluss der übrigen Punkte völlig ausgedrückt; nach Anbringung dieser Kraft verhält

Fig. 161.



sich also der Punkt m wie ein freier. Nennt man daher p die wirkliche Beschleunigung des Punktes m, so muss die dazu erforderliche Kraft mp die Mittelkraft aus K und S darstellen, oder man kann schreiben

$$mp \equiv K, S.$$

Ist aber mp die Mittelkraft von K und S, so würde das Entgegengesetzte von mp, die Kräfte K und S aufheben, was man schreiben kann: $K, S, -mp \equiv 0$. Diese Kraft $-mp$, die dem Entgegengesetzten der Beschleunigung p des Punktes m entspricht, nennen wir seine Ergänzungskraft, ebenso wie es bei der Betrachtung der scheinbaren Bewegung bezw. Ruhe eines Punktes (S. 84 u. 88) geschah. (Es ist ja auch ein Massenpunkt in scheinbarer Ruhe in Bezug auf einen Raum, der sich mit der Geschwindigkeit und Beschleunigung des Punktes verschiebt.)

Dies Tilgen der Kräfte K, S und $-mp$ findet an jedem Massenpunkte statt; daraus folgt dann auch ein gegenseitiges Aufheben der Gesammtheit der entsprechenden Kräftegruppen an der ganzen Massengruppe, d. h.:

Die Gruppe der sämmtlichen Ergänzungskräfte $[-mp]$ (mit der eckigen Klammer als Gruppenzeichen) hebt die beiden Gruppen der äusseren Kräfte $[K]$ und der inneren Kräfte $[S]$ auf.

Die auf S. 96—136 entwickelten Lehren über die Gleichwerthigkeit und Zusammensetzung der Kräfte gelten einstweilen nur für Kräfte an starren Körpern. Wenn aber an einer veränderlichen Massengruppe jeder Massenpunkt der Einwirkung von drei Kräften unterworfen wird, die sich aufheben oder im Gleichgewichte halten, so wird in diesem Gleichgewichtszustande der Kräfte jedes Punktes auch dadurch nichts geändert werden, dass man die Punkte in starre Verbindung bringt. Wenn man also die drei Kräftegruppen $[-mp]$, $[K]$, $[S]$ nach den Lehren über die Zusammensetzung der Kräfte an starren Körpern zu einer Mittelkraft R und einem Achsenmoment $\mathfrak{M}$ vereinigt, so müssen R und $\mathfrak{M}$ gleichzeitig Null werden. Die inneren Spannkräfte S wirken aber zwischen je zwei Punkten nach dem Gesetze der Wechselwirkung gleich und entgegengesetzt und heben sich daher bei der Zusammensetzung aller Kräfte zu je zweien auf, so dass die Gruppe der inneren Kräfte $[S]$ überhaupt verschwindet. Daraus folgt der Satz,

welchen d'Alembert (1717—1783) im Jahre 1743 in etwas anderer Fassung aufgestellt hat:

An einem starren Körper oder auch an einer veränderlichen Massengruppe heben die gesammten Ergänzungskräfte $[-mp]$ die Gruppe der äusseren Kräfte $[K]$ auf, wenn die Zusammensetzung der Kräfte wie an einem starren Körper erfolgt.

Mit Hülfe dieses Satzes lässt sich leicht die Frage beantworten, unter welcher Bedingung ein starrer Körper eine rein fortschreitende Bewegung, sog. Verschiebung ausführen kann. Bei einer Verschiebung haben alle Punkte des Körpers in einem Augenblicke gleiche Geschwindigkeit und Beschleunigung; nennt man die gemeinsame Beschleunigung p, so bilden die Ergänzungskräfte $[-mp]$ eine Kräftegruppe, die sich gleichmässig über die Masse des Körpers vertheilt. Die Kräfte haben eine durch den Schwerpunkt gehende Mittelkraft $-Mp$, und diese muss von den äusseren Kräften aufgehoben werden. Erkennt man also, dass ein Körper eine reine Verschiebung erfährt, so kann man daraus schliessen, dass die Mittelkraft aller auf ihn wirkender äusseren Kräfte durch den Schwerpunkt gehen und von der Grösse $+Mp$ sein muss. Umgekehrt genügt aber das Wirken dieser Kraft noch nicht zur Erzeugung einer Verschiebung, sondern es ist dazu noch erforderlich, dass der Körper auch zu Anfang keine Drehbewegung hatte.

13. Satz von der Bewegung des Schwerpunktes.

Die Ergänzungskraft $-mp$ hat nach der x-Richtung eine Seitenkraft $-mp_x$, die Seitenkraft einer äusseren Kraft K in der x-Richtung sei $K\cos a$, dann muss nach d'Alembert's Satze sein:

$$\Sigma K\cos a - \Sigma m p_x = 0, \text{ oder, wenn } \Sigma K \cos a = X,$$

$$\Sigma m p_x = X.$$

Bezieht man nun die Punkte des Körpers auf ein festes Achsenkreuz, so ist $dx:dt$ die Geschwindigkeit, $\frac{d^2x}{dt^2}$ die Beschleunigung in der x-Richtung, also

$$\Sigma m \frac{d^2x}{dt^2} = X. \tag{1}$$

Nach der Lehre vom Schwerpunkt ist $\Sigma m x = M x_0$ und, weil x und x_0 mit der Zeit t veränderlich sind,

$$2)\qquad \Sigma m \frac{dx}{dt} = M \frac{dx_0}{dt}$$

$$\Sigma m \frac{d^2 x}{dt^2} = M \frac{d^2 x_0}{dt^2};\ \text{mithin wird}$$

$$3)\qquad M \frac{d^2 x_0}{dt^2} = X.$$

Darin bedeutet $\frac{d^2 x_0}{dt^2}$ die Seitenbeschleunigung des Schwerpunktes in der Richtung der x-Achse. Dieselbe Beziehung gilt aber auch für einen einfachen Massenpunkt von der Masse M, der sich unter Einwirkung der äusseren Kräfte K bewegt, und zwar gilt dies für jede Achsenrichtung.

Also: Der Schwerpunkt eines Körpers oder einer beliebigen Massengruppe bewegt sich genau so, als ob die ganze Masse des Körpers oder der Gruppe in ihm vereinigt wäre und als ob sämmtliche äussere Kräfte (parallel verschoben) an ihm wirkten. Die inneren Kräfte haben hiernach auf die Bewegung des Schwerpunktes keinen Einfluss.

Durch diesen Satz bekommt die Mechanik des Massenpunktes eigentlich erst ihr grosses Anwendungsgebiet. Da es einen einzelnen Massenpunkt von verschwindend kleinen Abmessungen in aller Strenge nicht giebt, so konnte es bis hierher scheinen, als ob die Lehren von der Bewegung des Massenpunktes für die Anwendung ziemlich werthlos seien. Aus vorstehendem Satz aber erkennt man, dass die Lehre von der Bewegung des Massenpunktes auch für Körper ihre Bedeutung hat, insofern sie die Bewegung des Schwerpunktes richtig darstellt. Eine ausserdem etwa noch vorkommende Drehung um den Schwerpunkt kann dann noch besonders untersucht werden und bildet eine Ergänzung oder Vervollständigung der ganzen Aufgabe, nicht aber eine Berichtigung. In vielen Fällen wird man auch auf diese (häufig schwierige) Ergänzung der Lösung verzichten und sich mit der Kenntnis der Bewegung des Schwerpunktes begnügen.

Ein Kräftepaar wird bei der Verschiebung der Kräfte an den Schwerpunkt zwei Kräfte liefern, die sich aufheben. Kräftepaare haben hiernach keine Einwirkung auf die Bewegung des Schwerpunktes, sondern beeinflussen nur die Drehung des Körpers um den Schwerpunkt.

14. Satz der Arbeit.

Auf einen Massenpunkt eines Körpers wirkt ausser der äusseren Kraft K eine innere Kraft S. Sie verrichten bei einer Bewegung des Körpers die Arbeiten $\mathfrak{A}_k$ und $\mathfrak{A}_i$. Sind c und v Anfangs- und Endgeschwindigkeit des Punktes, so gilt für den Massenpunkt $1/2\, m v^2 - 1/2\, m c^2 = \mathfrak{A}_k + \mathfrak{A}_i$, denn an dem Massenpunkt m kann für die Arbeit der Mittelkraft aus K und S ohne Weiteres die Arbeitssumme der Einzelkräfte gesetzt werden. Stellt man diese Gleichung für sämmtliche Massenpunkte auf, so ergiebt sich durch Zusammenzählen:

1) $$\Sigma\, 1/2\, m v^2 - \Sigma\, 1/2\, m c^2 = \Sigma \mathfrak{A}_k + \Sigma \mathfrak{A}_i.$$

Oder die Zunahme des ganzen Körpers an Arbeitsvermögen ist gleich der Arbeitssumme der äusseren und der inneren Kräfte. Es lässt sich zeigen, dass die Arbeit der inneren Kräfte für einen starren Körper Null ist.

Die inneren Kräfte treten zwischen je zwei Massenpunkten paarweise gleich und entgegengesetzt auf. Betrachten wir ein Paar solcher Massenpunkte m und m_1 (Fig. 162) mit den inneren Kräften S, welche beispielsweise gegenseitige Anziehungskräfte sein mögen, und nehmen wir an, dass sich die Punkte um ds bezw. ds_1 bewegen. Zerlegen wir dann die Kräfte S in X, Y, Z; ds in die Projektionen dx, dy, dz; ds_1 in dx_1, dy_1, dz_1, so wird an m die Arbeit verrichtet: $X\,dx + Y\,dy + Z\,dz$, an m_1 aber $-(X\,dx_1 + Y\,dy_1 + Z\,dz_1)$. Die Arbeitssumme an beiden Punkten ist also $d\mathfrak{A}_i = X d(x - x_1) + Y d(y - y_1) + Z d(z - z_1)$. Bildet aber S mit den Achsenrichtungen die Winkel α, β, γ, so ist, wenn x, y, z bezw. x_1, y_1, z_1 die Koordinaten von m und m_1, a ihre Entfernung:

Fig. 162.

$$X = S \cos \alpha = S \frac{(x_1 - x)}{a} = -S \frac{x - x_1}{a}$$

$$Y = S \cos \beta = S \frac{y_1 - y}{a} = -S \frac{y - y_1}{a}$$

$$Z = S \cos \gamma = S \frac{z_1 - z}{a} = -S \frac{z - z_1}{a}.$$

Daher kann man schreiben:

$$d\mathfrak{A}_i = -\frac{S}{2a} d\left\{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2\right\}, \text{ oder,}$$

weil $x_1 - x$, $y_1 - y$ und $z_1 - z$ die drei Projektionen von a:

$$d\mathfrak{A}_i = -\frac{S}{2a} d(a^2) = -\frac{S}{2a} 2a\,da = -S\,da.$$

Ist also der Abstand a der beiden Punkte veränderlich, so verrichten die inneren Kräfte S eine Arbeit; dies wird gelten für elastisch-feste Körper, die während der Betrachtung ihre Form ändern. Für starre Körper aber ist $da = 0$, mithin auch $d\mathfrak{A}_i = 0$. Also:

Bei **starren** Körpern ist die Zunahme an Arbeitsvermögen gleich der Arbeitssumme der **äusseren** Kräfte.

2) $$\Sigma \tfrac{1}{2} m v^2 - \Sigma \tfrac{1}{2} m c^2 = \Sigma \mathfrak{A}_k.$$

Hatte ein starrer Körper zu Anfang keine Bewegung, war die Geschwindigkeit aller Punkte Null und überlässt man ihn der alleinigen Einwirkung der Schwere, so führt er (nach S. 141) eine lothrechte Verschiebung aus, bei welcher der Schwerpunkt und somit auch jeder andere Punkt eine lothrechte, gleichförmig beschleunigte Fallbewegung hat. Die Arbeit der Schwerkräfte richtet sich allein nach der Senkung h des Schwerpunktes und beträgt Mgh. Da in einem Augenblicke sämmtliche Punkte dieselbe Geschwindigkeit haben, so ist einfach $\tfrac{1}{2} Mv^2 - \tfrac{1}{2} Mc^2 = Mgh$, genau wie beim Massenpunkte.

Wird der Körper aber in schräger Richtung so fortgeworfen, dass zu Anfang die Bewegung ebenfalls ohne jede Drehung erfolgt, dass also sämmtliche Punkte die gleiche Geschwindigkeit c haben, so muss (unter Vernachlässigung des Luftwiderstandes) die weitere Bewegung ebenfalls eine Verschiebung sein, und zwar wird der Schwerpunkt, und damit jeder andere Punkt, die Wurfparabel beschreiben, genau wie ein einfacher Massenpunkt.

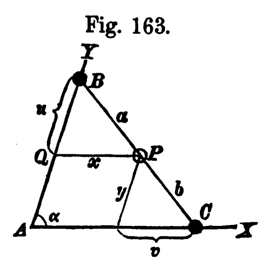
II. A. Gleichgewicht starrer Körper.

1. Gleichgewichts-Bedingungen.

Man bezeichnet einen Körper als im Gleichgewichte befindlich, wenn seine sämmtlichen Massenpunkte im Gleichgewichte sind, d. h. eine geradlinig-gleichförmige Bewegung ausführen, oder (als Sonderfall) in Ruhe sind; in letzterem Falle haben sie weder Geschwindigkeit noch Beschleunigung. Solcher Gleichgewichtszustand besteht offenbar, wenn der Körper eine gleichförmige und geradlinige Verschiebung erleidet, u. zw. ist eine derartige Verschiebung auch die einzige Möglichkeit des Gleichgewichtes. Man könnte vielleicht meinen, dass die Punkte eines Körpers sich auch geradlinig bewegen könnten, ohne dass diese Bahnlinien nothwendig einander parallel sein müssten, doch lässt sich zeigen, dass dies bei **starren** Körpern nicht möglich ist.

Denkt man sich den Punkt B (Fig. 163) längs einer Geraden AY, den Punkt C längs einer Geraden AX geführt und haben B und C eine unveränderliche Entfernung, so wird ein beliebiger Punkt P der Verbindungsgeraden, der von B und C um a bezw. b absteht, eine **Ellipse** beschreiben.

Fig. 163.



Nennt man nämlich die auf AX und AY bezogenen schiefwinkligen Koordinaten des Punktes P x und y, setzt $AB - y = u$, $AC - x = v$, so ist in dem Dreiecke BPQ:

$$a^2 = u^2 + x^2 - 2\,u\,x \cos\alpha .$$

Ferner ist nach der Figur $u : y = a : b$; setzt man dies ein, so wird

$$a^2 = \frac{a^2}{b^2}\,y^2 + x^2 - 2\,\frac{a}{b}\,y\,x \cos\alpha ,$$

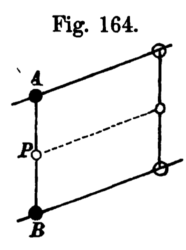
oder

$$1 = \frac{y^2}{b^2} + \frac{x^2}{a^2} - 2\,\frac{y}{b}\,\frac{x}{a} \cos\alpha .$$

Dies ist die Gleichung einer Ellipse. Führt man also 2 Punkte A und B eines starren Körpers in nicht parallelen Geraden, so bewegen sich die sonstigen Punkte der Geraden AB **nicht** in

geraden Linien. Nur wenn die Führungslinien der Punkte A und B parallele Gerade sind (Fig. 164), beschreibt auch jeder andere Punkt der AB eine Gerade. Ein Körper ist also nur im Gleichgewichte bei einer gleichförmig-geradlinigen Verschiebung oder beim Ruhezustande (Verschiebung mit der Geschwindigkeit und Beschleunigung Null). Hierbei haben alle Massenpunkte die Beschleunigung Null, es sind mithin alle Ergänzungskräfte Null. Nach dem Satze d'Alembert's (S. 141) müssen sich also sämmtliche äussere Kräfte schon unter sich allein aufheben.

Fig. 164.



Umgekehrt folgt aber aus dem gegenseitigen Aufheben der äusseren Kräfte noch nicht, dass der Körper im Gleichgewichte sei; vielmehr muss dazu ausserdem noch die Bedingung erfüllt sein, dass der Körper auch zu Anfang keine Drehbewegung hatte. Ist im Anfange Ruhe oder gleichförmige geradlinige Verschiebung, also Gleichgewicht, vorhanden, so wird dieses andauern, solange sich die äusseren Kräfte aufheben. Etwaige äussere Kräfte lassen sich am starren Körper auf eine Mittelkraft R und ein Achsenmoment $\mathfrak{M}$ zurückführen; und weil R und $\mathfrak{M}$ im Allgemeinen nicht vereinigt werden können, so ist zum Aufheben der gegebenen Kräfte erforderlich, dass gleichzeitig $R = 0$ und $\mathfrak{M} = 0$ sei, und dies ist nach Gleichung 1, 2, 3, 4, 6 (S. 112) nur möglich, wenn

$$1)\quad \Sigma K \cos \alpha = 0; \qquad 2)\quad \Sigma K \cos \beta = 0;$$

$$3)\quad \Sigma K \cos \gamma = 0; \qquad 4)\quad \mathfrak{M}_x = 0;$$

$$5)\quad \mathfrak{M}_y = 0; \qquad 6)\quad \mathfrak{M}_z = 0.$$

Mit Rücksicht auf die Bedeutung von $\mathfrak{M}_x$ u. s. w. nach S. 114 kann man also aussprechen:

Die an einem starren Körper wirkenden Kräfte heben sich auf, wenn in Bezug auf ein beliebiges Achsenkreuz

1. die algebraische Summe der bei rechtwinkliger Zerlegung parallel zu jeder Achsenrichtuug fallenden Seitenkräfte Null ist, und wenn zugleich

2. die algebraische Summe der Momente der Kräfte in Bezug auf jede der Achsen Null ist.

Für Gleichgewicht haben also die äusseren Kräfte im Allgemeinen sechs Bedingungen zu erfüllen.

Liegen die Kräfte aber durchweg in derselben Ebene, so wähle man diese zur xy-Ebene; es fällt dann die Gl. 3 (S. 112) aus, weil in der z-Richtung überhaupt keine Seitenkräfte sich ergeben; auch die Momentengleichungen 4 und 5 fallen fort, weil die in der xy-Ebene liegenden Kräfte in Bezug auf die x- und y-Achsen, welche mit ihnen in derselben Ebene liegen, keine Momente haben (S. 100). $\mathfrak{M}_z$ bedeutet dann die Momentensumme für einen beliebigen Punkt der Kräfteebene. Ausserdem wird noch $\cos\beta = \sin\alpha$, und es verbleiben die drei Bedingungen:

$$7)\qquad \Sigma K \cos\alpha = 0; \quad \Sigma K \sin\alpha = 0; \quad \mathfrak{M}_z = \Sigma K l = 0.$$

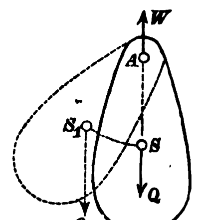
Liegt die x-Achse wagerecht, die y-Achse lothrecht, so heissen die Bedingungen in Worten:

Die algebraische Summe aller wagerechten Seitenkräfte, die algebraische Summe aller lothrechten Seitenkräfte und die Momentensumme für einen beliebigen Punkt der Ebene müssen Null sein.

2. An einem Punkte befestigter Körper.

Ist ein Punkt A eines starren Körpers unwandelbar befestigt und soll der Körper in Ruhe bleiben, so muss der Punkt eine Widerstandskraft W leisten, welche den sonstigen an dem Körper auftretenden Kräften das Gleichgewicht hält. Sind diese Kräfte nur Schwerkräfte, so lassen sie sich zu dem durch den Schwerpunkt S gehenden Gesammtgewichte Q zusammensetzen. Es muss daher W genau das Entgegengesetzte von Q sein. Daher muss der Befestigungspunkt A in der Schwerpunkts-Lothrechten des Körpers liegen. Hierbei verhält sich aber der Körper, wenn er durch eine Verrückung aus der Gleichgewichtslage gebracht wurde, verschieden, je nach der Höhenlage des Befestigungspunktes A.

Fig. 165.



Lag nämlich beim Ruhezustande der Befestigungspunkt A oberhalb des Schwerpunktes (Fig. 165), so kann der aus der Ruhelage in die punktirte schräge Lage gebrachte Körper, wenn man ihn loslässt,

nicht mehr im Gleichgewichte sein, weil Q nicht durch A hindurchgeht. Vielmehr dreht sich nun der Körper um den Befestigungspunkt und kommt (nach einer gewissen Anzahl Schwingungen) erst wieder zur Ruhe, wenn er die ursprüngliche Lage wieder erreicht hat. Er kehrt also unter Einwirkung der Schwere in den früheren Gleichgewichtszustand zurück, deshalb nennt man diesen einen sicheren (stabilen) Gleichgewichtszustand.

Im Ruhezustande geht hiernach die Schwerpunkts-Lothrechte durch den Aufhängepunkt. Hängt man daher einen Körper nach einander in verschiedenen Punkten A und B auf, so bestimmt sich dadurch in jeder Ruhelage eine Gerade, die den Schwerpunkt enthalten muss. Mittels zweimaliger Aufhängung kann also der Schwerpunkt eines Körpers durch Versuche gefunden werden.

Lag der Befestigungspunkt A lothrecht unter dem Schwerpunkt (Fig. 166), so kann der Körper nach einer seitlichen Verrückung nicht wieder von selbst in die ursprüngliche Lage zurückkehren, vielmehr entfernt sich der Körper gänzlich aus der früheren Lage und sucht sich eine neue sichere Gleichgewichtslage, wobei der Schwerpunkt unterhalb S zu liegen kommt. Der anfängliche Zustand heisst dabei ein unsicherer (labiler) Gleichgewichtszustand; derselbe kann nur durch vorsichtiges Balanciren erhalten werden. Unentschieden (indifferent) heisst der Zustand, wenn der Befestigungspunkt A mit dem Schwerpunkt zusammenfällt (Fig. 167). In diesem Falle besteht bei jeder Richtung des Körpers Gleichgewicht.

Fig. 166.

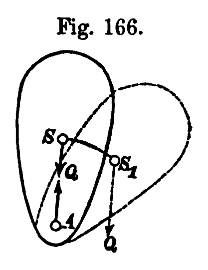
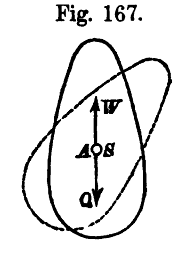


Fig. 167.



Zu beachten ist noch, dass im sicheren Gleichgewichte der Schwerpunkt so tief wie möglich liegt, dass bei einer Verrückung aus derselben der Schwerpunkt gehoben werden muss, wozu ein äusserer Arbeitsaufwand nöthig ist. Beim unsicheren Gleichgewichte liegt der Schwerpunkt so hoch wie möglich. Bei einer Störung desselben verrichtet die Schwerkraft positive Arbeit und erzeugt Geschwindigkeit; die Wiederherstellung des Gleichgewichts verlangt Hebung des Schwerpunktes, d. h. Aufwendung äusserer Arbeit. Beim unentschiedenen Gleichgewichte ist zu einer Drehung um den Schwerpunkt weder positive noch negative Arbeit erforderlich.

Die Befestigung eines Körpers an nur einem Punkte kommt ziemlich selten vor, ist auch gar nicht sehr einfach zu verwirklichen. Viel häufiger und einfacher ist die Befestigung an einer wagerechten geraden Linie, oder die Aufhängung eines Körpers an einer wagerechten Achse, etwa durch Hindurchtreiben eines glatten, runden Drahtstiftes oder Hindurchstecken eines glatten Bolzens durch ein cylindrisches Loch. Dafür gelten die vorstehenden Figuren ebenfalls, indem A die Projektion der Achse darstellt; die Bedingungen für die verschiedenen Arten des Gleichgewichtes sind die gleichen.

Unterstützte Körper. Ähnliche Betrachtungen gelten für den Gleichgewichtszustand eines Körpers, der sich mittels kugelförmiger Fläche auf eine wagerechte Ebene stützt (Fig. 168). Hierbei geht der Normalwiderstand N durch den Krümmungsmittelpunkt O der Kugelfläche hindurch, auch wenn man den Körper etwas aus der aufrechten Lage entfernt (Fig. 169), und dieser Punkt O tritt nun für die Beurtheilung der Sicherheit des Gleichgewichts an die Stelle des Befestigungspunktes A. Stellt man den Körper schief durch Drehung nach rechts, so geht der Normalwiderstand N nicht mehr durch A, sondern durch den neuen Berührungspunkt B, stets aber auch durch O. N und Q bilden ein Kräftepaar, welches den Körper, falls S unterhalb O lag, in die Gleichgewichtslage zurückführt; zugleich hat S in der Gleichgewichtsstellung die tiefste mögliche Lage, und zur Störung des Gleichgewichts ist äusserer Arbeitsaufwand erforderlich. Das Gleichgewicht war daher ein gesichertes. Liegt S oberhalb O, so entspricht dem Gleichgewichte die höchste mögliche Lage von S, das Gleichgewicht ist ein unsicheres. Fallen S und O zusammen, so ist das Gleichgewicht unentschieden, bleibt auch nach einer kleinen Drehung noch bestehen.

Fig. 168.

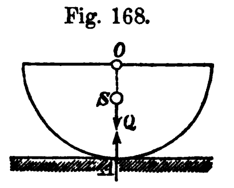
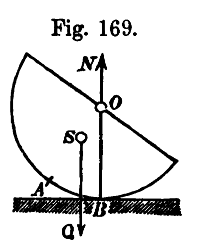


Fig. 169.



Die Vertauschung der unteren Kugelfläche mit einer Cylinderfläche entspricht der obigen Ersetzung eines Befestigungspunktes A durch eine Drehachse.

Eine homogene Kugel befindet sich auf wagerechter Ebene im unentschiedenen Gleichgewicht, ebenso ein Cylinder. Halbkugel und Halbcylinder aber sind im sicheren Gleichgewichte.

Beispiel: Wie hoch muss in Fig. 170 der Kegel sein, damit der aus Halbkugel und Kegel bestehende Körper im unentschiedenen Gleichgewichte sei? Der Gesammtschwerpunkt S muss in O liegen, und dazu ist erforderlich

$$M_1 \cdot SS_1 = M_2 \cdot SS_2 .$$

Die Dichte des Kegels sei γ_1, die der Halbkugel γ_2, dann kann man statt des Verhältnisses der Massen das Verhältnis der Gewichte setzen, und weil $SS_1 = {}^1\!/_4\, h$, $SS_2 = {}^3\!/_8\, r$, so wird

$$\gamma_1 \frac{r^2 \pi h}{3} \frac{h}{4} = \gamma_2 \frac{2}{3} r^3 \pi \frac{3}{8} r .$$

Fig. 170.

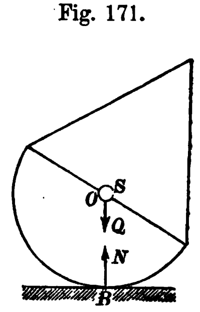


Fig. 171.

Daraus folgt $h^2 = \frac{3\,\gamma_2}{\gamma_1} r^2 .$

Sind die Einzelkörper von demselben Stoffe, so wird $h^2 = 3\,r^2$. Die entsprechende Kegelseite wird dann $= 2\,r$, die Projektion des Kegels also ein gleichseitiges Dreieck (wie in Fig. 170 u. 171 gezeichnet).

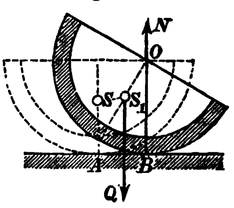


Fig. 172.

Ist aber der Kegel aus Holz, die Halbkugel aus Metall, etwa mit $\gamma_2 = 9\,\gamma_1$, so wird

$$h = 3\,r\sqrt{3} = 5{,}20\, r .$$

Soll das Gleichgewicht sicher sein, so muss man h kleiner machen.

Besteht der Aufsatz aus einem Cylinder, so ist die Bedingung für unentschiedenes Gleichgewicht

$$h^2 = \frac{\gamma_2}{\gamma_1} \frac{r^2}{2} .$$

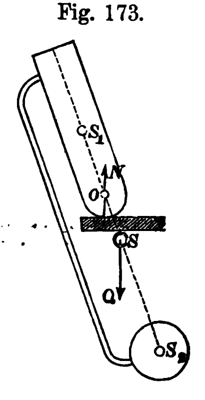


Fig. 173.

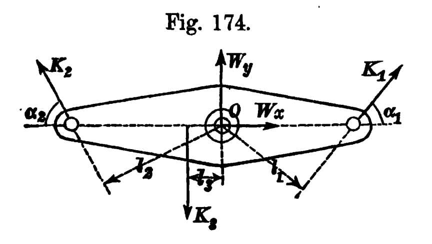
Fig. 172 zeigt den sicheren Gleichgewichtszustand einer Halbkugelschale. Ist bei einer solchen die Wandstärke gering, so liegt der Schwerpunkt nach S. 135 im Abstande ${}^1\!/_2\, r$ vom Mittelpunkte O.

Fig. 173 (aus Ritter's Mechanik entnommen) zeigt, wie der obere Körper mit hoch liegendem Schwerpunkte S_1 durch starre Verbindung mit einer tiefer liegenden Kugel S_2 zu einem zusammengesetzten Körper mit dem Schwerpunkte S und mit sicherem Gleichgewicht umgeändert werden kann.

3. Hebel.

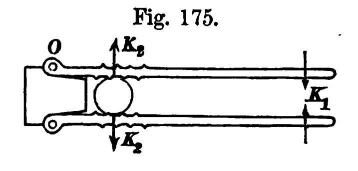
Ein Hebel ist ein fester Körper, der nur um eine feste Achse O drehbar und zum Angriffe verschiedener Kräfte eingerichtet ist. Das eigene Gewicht wird ebenso wie jede andere am Hebel auftretende Kraft behandelt und kann häufig gegen die sonstigen Kräfte vernachlässigt werden.

Fig. 174.



Die Kräfte mögen sämmtlich in der Bildebene, rechtwinklig zur Achse O liegen (Fig. 174). Die Achse, völlig glatt angenommen, leistet einen durch die geometrische Drehachse gehenden Widerstand W, der nach Grösse und Richtung unbekannt ist, für welche beiden Unbekannten aber besser die beiden Seitenkräfte W_x und W_y eingeführt werden. In dem Falle der Fig. 174 heisst die Gleichung der wagerechten Kräfte

Fig. 175.



1) $$W_x + K_1 \cos a_1 - K_2 \cos a_2 = 0,$$

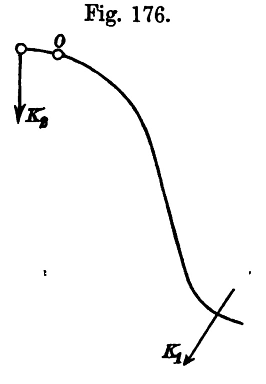
die Gleichung der lothrechten Kräfte

2) $$W_y + K_1 \sin a_1 + K_2 \sin a_1 - K_3 = 0;$$

die Gleichung der Momente wird am besten auf die wirkliche Drehachse bezogen, weil dann W_x und W_y in ihr nicht vorkommen, sondern nur die bewegenden Kräfte K. Es ist

3) $$0 = -K_1 l_1 + K_2 l_2 - K_3 l_3.$$

Fig. 176.



Häufig kommt es auf die Kenntnis des Widerstandes W der Drehachse nicht an; dann ist letzte Gleichung die allein maſsgebende: Bei einem Hebel muss für den Gleichgewichtszustand die Momentensumme aller Kräfte in Bezug auf die Drehachse Null sein. Oder die Kräfte K müssen eine durch O gehende Mittelkraft haben.

Sind sämmtliche Hebelarme gegeben, auch die beiden Kraftgrössen K_2 und K_3, so ist durch die Momentengleichung K_1 bestimmt. Hiernach kann

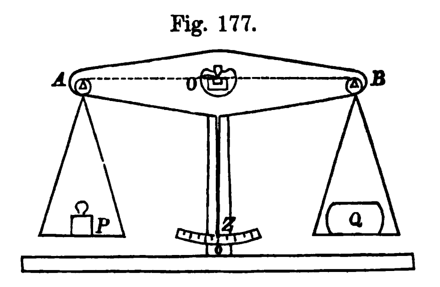
man dann aus den Gleichungen 1 u. 2 auch W_x und W_y berechnen. Die für die Momente in Frage kommenden Hebelarme sind im Allgemeinen nicht die Abstände der Angriffspunkte der Kräfte von der Drehachse, sondern die rechtwinkligen Abstände der Kraftrichtungen von der Drehachse.

Fig. 175 zeigt die Vereinigung zweier Hebel zu einem Nussknacker, Fig. 176 einen um O drehbaren Pumpenschwengel; K_1 ist die Triebkraft, K_2 der Widerstand der Pumpenstange.

4. Hebelwaagen.

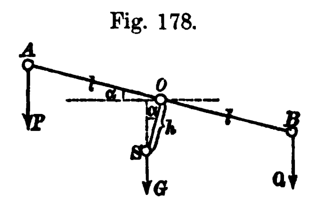
Gleicharmige Hebelwaage. Der Waagebalken ist mit einer wagerechten Drehachse O versehen (Fig. 177), welche zur Verminderung der Reibung durch eine auf eine sog. Pfanne sich stützende Stahlschneide gebildet wird. Bei A und B sind in gleichen Abständen l von O ebenfalls Schneiden angeordnet, an denen gleich schwere Waagschalen aufgehängt sind. Die geometrischen Drehachsen A, O und B mögen in einer Flucht liegen. Es ist zunächst erforderlich, dass der Waagebalken unter der Last der beiden gleich schweren Schalen sich wagerecht stelle und diese Stellung durch einen Zeiger Z markire. Diese Bedingung wird, wie sich aus dem Folgenden ergiebt, erfüllt, wenn der Waagebalken für sich allein, d. h. ohne die Waagschalen in sicherem Gleichgewicht ist, d. h. wenn sein Schwerpunkt S um eine Grösse h unterhalb der Drehachse O liegt. Im Ruhezustande üben die bei A und B angehängten Waagschalen auch gleiche Kräfte auf den Balken aus und halten ihn im Gleichgewichte. Dasselbe gilt, wenn die Waagschalen mit Körpern von gleichem Gewichte belastet werden. Ist aber der Körper vom Gewichte Q auf der rechten Seite schwerer als das Gewichtstück P auf der linken (Fig. 178), so entsteht eine Drehung des Balkens, bei der die rechtsseitige Schale sinkt; weil aber S unterhalb O liegt, so tritt nun das Gewicht G des Balkens auf die linke Seite und kommt mit seinem Momente dem der kleineren Belastung zu

Fig. 177.



Hülfe, so dass bei einem bestimmten Ausschlagwinkel α wieder sicheres Gleichgewicht eintritt. Die Beziehung zwischen dem Gewichtsunterschiede $Q - P$ und dem Winkel α ist sehr einfach, wenn A, O und B in einer Geraden liegen, ist aber auch nicht schwierig, wenn diese Bedingung nicht erfüllt ist. Hier soll nur der einfachste Fall betrachtet werden. Da es nur auf den Gewichtsunterschied ankommt, so mögen die Gewichte der Schalen und Ketten in P und Q mit enthalten sein. Dann entsteht die Momentengleichung $Ql \cos \alpha = Pl \cos \alpha + Gh \sin \alpha$, oder

Fig. 178.



$$1) \qquad Q - P = G \frac{h}{l} \operatorname{tg} \alpha .$$

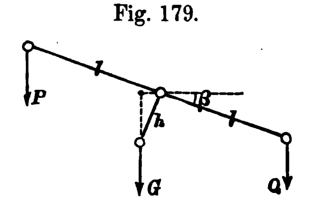
Bei der vorausgesetzten einfachen Anordnung ist der Gewichtsunterschied $Q - P$ mit der Tangente des Ausschlagwinkels verhältnisgleich, so dass aus der Beobachtung von α der Unterschied $Q - P$ ersehen werden kann.

Beispiel: Es sei G (Gewicht des Waagebalkens) 2^{kg}, $h = 1{,}5^{\text{ cm}}$, $l = 30^{\text{ cm}}$, $\alpha = 6^{0}$, $\operatorname{tg}\alpha = 0{,}1$, dann ist $Q - P = 2 \frac{1{,}5}{30} \cdot 0{,}1 = \frac{1}{100}^{\text{kg}} = 10^{\text{ g}}$. Einem Winkel von 6^{0} muss also an der Zeigertheilung die Bezeichnung $10^{\text{ g}}$ entsprechen.

Beim Gebrauche der Waage kann natürlich die Gleichgewichtsstellung nicht sofort eintreten; es muss aber dann ein Moment vorhanden sein, welches die Waage zum **Einspielen** bringt. Unter Einspielen versteht man das Schwingen um eine sichere Gleichgewichtslage, das Bestreben, dieselbe einzunehmen.

Einem Gewichtsunterschiede $Q - P$ möge ein Ausschlagwinkel α entsprechen, so dass $Gh = (Q - P)\, l : \operatorname{tg} \alpha$. Beträgt dann der augenblickliche Abweichungswinkel von der Wagerechten β und hält man die Waage für einen Augenblick fest, so entsteht, wenn $\beta > \alpha$ gedacht wird, ein links herum drehendes, nach der Gleichgewichtslage treibendes Moment

Fig. 179.



$$\mathfrak{M} = Gh \sin \beta - (Q - P)\, l \cos \beta .$$

Setzt man hierin den vorstehenden Werth für Gh ein, so wird

$$\mathfrak{M} = \frac{(Q-P)\,l}{\operatorname{tg}\alpha}\sin\beta - (Q-P)\,l\cos\beta$$

$$= (Q-P)\,l\cos\beta\left(\frac{\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha} - 1\right).$$

Hiernach ist $\mathfrak{M} \gtreqless 0$, wenn $\beta \gtreqless \alpha$. $\mathfrak{M}$ nennen wir das Einspielungs-Moment.

Da $Q-P$ für Gleichgewicht verhältnisgleich mit $\operatorname{tg}\alpha$, wobei $\operatorname{tg}\alpha$ zwischen 0 und ∞ jeden Werth haben kann, so kann man theoretisch jeden beliebig grossen Gewichtsunterschied $Q-P$ mit Hülfe des Ausschlagwinkels α messen, kann also ein Gewichtstück P ganz entbehren, Q allein durch α ermitteln. Nach diesem Grundgedanken ist eingerichtet die

Zeigerwaage, welche zum Wägen von Briefen, Garnen, Papieren bestimmt ist. Fig. 180 entspricht einer Garnwaage, bei welcher keine Schale benutzt, sondern das Garn unmittelbar an dem rechtsseitigen Haken aufgehängt wird. Die Fig. 180 stellt den unbelasteten Zustand dar, wobei der Zeiger auf Null steht; der Schwerpunkt S des Waagebalkens muss entsprechend um h lothrecht unter der Drehachse O liegen. Wird bei A ein Gewicht Q eingehängt, so bildet sich eine neue Gleichgewichtslage mit einem Ausschlagwinkel α, um den sich der ganze Hebel AOB verdreht und der an der Theilung messbar wird. Für die Momentengleichung ist nur die Lage der Punkte A, O und S (Fig. 181) massgebend, und es wird $Ql\cos\alpha = Gh\sin\alpha$ oder $Q = G\frac{h}{l}\operatorname{tg}\alpha$, entsprechend Gl. 1, S. 153 für $P=0$.

Fig. 180.

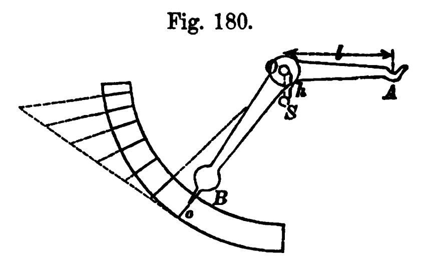


Fig. 181.

$Gh:l$ ist ein unveränderlicher Festwerth für eine bestimmte Waage. Auf dem Kreisbogen wird man bei den Theilstrichen nicht Zahlen für die Winkel α, sondern sogleich für die entsprechenden Gewichte Q einritzen. Die Theilung ist dann selbstverständlich

nicht gleichmässig, da mit wachsendem Winkel die Tangente immer schneller wächst. Die Gewichtstheilung wird daher mit zunehmendem α enger und enger werden; darin findet aber die Anwendbarkeit der Waage ihre Grenze.

Beispiel: Entspricht z. B. einem Gewichte von 10 g ein Ausschlag von 10°, so ist

$$10 = G \frac{h}{l} \operatorname{tg} 10 = 0{,}176\, G \frac{h}{l}.$$

Will man nun die Ausschlagwinkel für Vielfache von 10 g haben, so hat man zu bedenken, dass $\operatorname{tg} \alpha$ mit Q verhältnisgleich wächst.

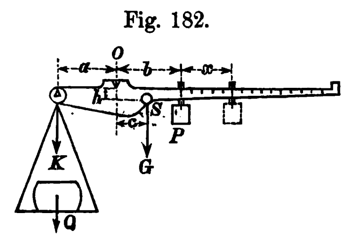
Für 20 g ist $\operatorname{tg} \alpha = 2 \cdot 0{,}176 = 0{,}352$; $\alpha = 19^0\ 24'$,
„ 100 g „ $\operatorname{tg} \alpha = 1{,}76$; $\alpha = 60^0\ 24'$,
„ 200 g „ $\operatorname{tg} \alpha = 3{,}52$; $\alpha = 74^0\ 9'$,
„ 300 g „ $\operatorname{tg} \alpha = 5{,}28$; $\alpha = 79^0\ 17'$,
„ 400 g „ $\operatorname{tg} \alpha = 7{,}04$; $\alpha = 81^0\ 55'$,
„ 500 g „ $\operatorname{tg} \alpha = 8{,}80$; $\alpha = 83^0\ 31'$,
„ 1000 g „ $\operatorname{tg} \alpha = 17{,}60$; $\alpha = 86^0\ 45'$,

Während also die Theilstriche für Null und 100 g um 60° von einander abstehen, sind die für 500 und 1000 g nur 3° von einander entfernt.

Die Theilung der Wage kann man leicht durch Zeichnung finden, indem man bei der Nullstellung des Zeigers OB eine Tangente an den Theilkreis vom Halbmesser r legt. Trägt man von OB aus den Winkel von 10 Graden ab, welcher dem Gewichte von 10 Grammen entsprach, so bekommt man auf der Berührungsgeraden sofort $r \cdot \operatorname{tg} 10^0$. Dieses Maſs $r \operatorname{tg} 10^0 = 0{,}176\, r$ hat man dann auf der Berührungsgeraden 100 Mal abzutragen bis zu einer Länge $= 17{,}6\, r$. Zieht man nun von der Achse O aus Strahlen nach diesen Theilpunkten, so bekommt man auf dem Theilkreise die Striche, welche den Gewichten bis 1000 g zugehören.

Bei der Schnellwaage (Fig. 182) wird nicht der Ausschlagwinkel α benutzt, vielmehr dient zum Abwägen ein der Grösse nach unveränderliches, auf dem wagerecht einzustellenden Hebel aber verschiebbares, sog. Laufgewicht. Es liegt bei dieser Waage der Schwerpunkt S des unbelasteten Waagebalkens nicht lothrecht unter der Drehschneide O, sondern um c nach rechts und um h nach unten. Die Grösse h ist, wie sich zeigen wird, für das Einspielen massgebend.

Fig. 182.



Ist K das Gewicht der leeren Schale, so gilt für das Gleichgewicht mit angehängter leerer Schale

1) $$Ka = Gc + Pb.$$

Legt man dann noch die Last Q auf die Schale, so muss das Laufgewicht P um x nach rechts verschoben werden, und wenn dann wieder eine wagerechte Ruhestellung des Hebels erreicht ist, so gilt dafür

2) $$(K + Q)\,a = Gc + P(b + x);$$

nach Abziehen der früheren Gleichung bleibt

3) $$Qa = Px, \text{ mithin } Q = Px : a.$$

$P : a$ ist der Festwerth der Waage, Q mit x verhältnisgleich; die Theilung des Laufhebels also gleichmässig.

Bringt man die für wagerechte Ruhestellung belastete Waage durch Rechtsdrehung um den Winkel α aus dem Gleichgewichte, so ist dazu ein Moment $\mathfrak{M}$ aufzuwenden, welches man leicht findet zu

$$\mathfrak{M} = (K + Q)\,a \cos\alpha - P(b + x)\cos\alpha - Gc\cos\alpha + Gh\sin\alpha.$$

Führt man hierin Gl. 2 ein, so bleibt $\mathfrak{M} = Gh\sin\alpha$ als Einspielungsmoment, welches also ein positives h bedingt, aber von c unabhängig ist.

Alle diese Waagen, bei denen zur Ausführung der Wägung Gewichtstücke oder das eigene Gewicht eines Theiles der Waage (des Balkens) benutzt werden, liefern nicht eigentlich das wirkliche Gewicht des vorliegenden Körpers, d. h. die Grösse der Anziehungskraft, welche der Körper von der Erde erfährt, sondern nur das Verhältnis seines Gewichtes zu dem Gewichte eines anderen Körpers an derselben Stelle der Erdoberfläche. Ein Körper, welcher eine richtige gleicharmige Hebelwaage mit einem Gewichtstücke von der Bezeichnung „1 Kilogramm" auf der anderen Seite wagerecht (bezw. auf Null) stellt, erfährt am Meeresspiegel unter 45^0 geogr. Breite von der Erde eine Anziehungskraft $= 1^{\text{kg}}$, am Äquator aber beträgt die Schwerkraft des Körpers sowohl wie des Gewichtstückes nach S. 94 nur $0{,}997^{\text{kg}}$. Eine solche Wägung stellt also eigentlich die Masse eines Körpers fest; so ist die Masse des eben beschriebenen Körpers ebenso wie diejenige des Gewichtstückes auf Grund der in diesem Buche gewählten Einheiten (S. 34) $1 : g = 1 : 9{,}806$ Massen-

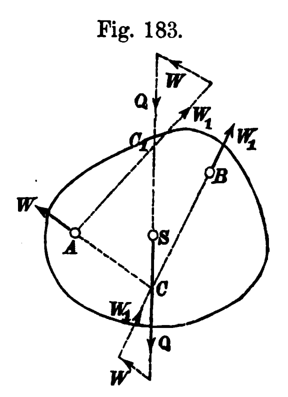
einheiten, u. zw. unveränderlich an jeder Stelle der Erde und des Weltenraumes.

Federwaagen dagegen, welche durch bestimmte Kräfte eine bestimmte, ablesbare Formänderung erleiden, zeigen die auf einen Körper ausgeübte Schwerkraft. Eine Federwaage, deren Theilung an einem Orte angefertigt war, wo die Fallbeschleunigung 9,806 beträgt, wird an diesem Orte unter einer Belastung mit einem Gewichtstück der Bezeichnung „1 Kilogramm“ oder mit 1^{l} Wasser die Schwerkraft zu 1^{kg} angeben, wird aber am Äquator unter derselben Last nur $0{,}997^{kg}$ zeigen. Beim Kaufe und Verkaufe kommt es im Grunde genommen auf die Masse eines Körpers an. Für den Käufer sind daher solche Federwaagen nachtheilig, die an einem Orte getheilt wurden, wo die Fallbeschleunigung kleiner ist als an dem Gebrauchsorte. Eine Federwaage, deren Theilung am Äquator angefertigt wurde, die also dort unter Belastung mit 1^{l} Wasser von 4^{0} C. oder einem ebenso schweren Gewichtstücke der Bezeichnung „1 Kilogramm“ die Schwerkraft mit 1^{kg} ablesen liess, wird unter Belastung mit dem gleichen Körper oder einem Körper gleicher Masse unter 45^{0} geogr. Breite die Schwerkraft zu $1{,}003^{kg}$ angeben, also schon durch eine Last von $0{,}997^{l}$ Wasser zu einer Gewichtsangabe von 1^{kg} gebracht werden.

5. Zweifach befestigter bezw. unterstützter Körper.

Ist ein unter Einwirkung seines Gewichtes Q stehender Körper an zwei Punkten A und B befestigt (Fig. 183), so wirken an diesen Widerstände W und W_1, welche mit Q im Gleichgewichte sein müssen. Die Mittelkraft von W und W_1 muss also das Entgegengesetzte von Q sein, oder es müssen W, W_1 und Q in einer Ebene liegen, und zwar in einer lothrechten Ebene, weil Q lothrecht ist. Da nun Q durch S geht, W und W_1 durch A bezw. B, so ist Ruhe des Körpers nur möglich, wenn der Schwerpunkt desselben in einer durch A und B gehenden lothrechten Ebene liegt. Nehmen wir an, diese Bedingung sei in Fig. 183 erfüllt, dann stehen für die Ermittelung der unbekannten Widerstände

Fig. 183.



W und W_1 nur die drei Gleichgewichts-Bedingungen für Kräfte in einer Ebene (S. 147) zur Verfügung. Jeder Widerstand ist aber nach Grösse und Richtung unbekannt, oder hat, nach bestimmten Richtungen zerlegt, zwei unbekannte Seitenkräfte Sonach liegen für die Ermittelung der Widerstände der Befestigungspunkte vier Unbekannte und nur drei Gleichungen vor. Die Aufgabe ist also mittels der Gleichgewichtsbedingungen allein nicht zu lösen, man nennt sie daher „statisch unbestimmt", und zwar im Besonderen „einfach statisch unbestimmt", weil gerade eine Gleichung zu wenig vorhanden ist. Man kann diese Unbestimmtheit auch geometrisch erkennen. W, W_1 und Q müssen sich in einem Punkte schneiden, oder, da die Richtung von Q gegeben, W und W_1 müssen sich in einem Punkte der Geraden Q schneiden; in welcher Höhe dieser Punkt aber liegt, ist unbestimmt, richtet sich nach der besonderen Art, wie die Befestigung vorgenommen wurde, und ist im Allgemeinen nur schwierig, in vielen Fällen auch gar nicht festzustellen. Nimmt man einen Schnittpunkt C der Kräfte an, so sind die Richtungen von W und W_1 bestimmt, es ist dann leicht das Kräftedreieck der drei Kräfte für Gleichgewicht (S. 63) zu zeichnen, womit auch die Grössen von W und W_1 feststehen. Ein anderer Punkt C_1 aber liefert ein anderes Ergebnis für W und W_1.

Ähnlich sind die Verhältnisse, wenn die Befestigung nicht an zwei Punkten A und B, sondern an zwei zur Bildebene rechtwinkligen wagerechten Achsen A und B erfolgt. Dann fällt die erste Frage, ob und wann der Körper im Ruhezustande sein kann, fort. Der Körper ist unwandelbar befestigt, an jeder Bewegung verhindert, — abgesehen vielleicht von einer Verschiebung längs der beiden Achsen, deren Möglichkeit für diese Untersuchungen keine Wichtigkeit hat.

Fig. 184.

Über die Art der Unbestimmtheit der Aufgabe bekommt man einige Aufklärung, wenn man die Widerstände W und W_1 zerlegt, u. zw. in den bestimmten Richtungen von A nach B und rechtwinklig dazu (Fig. 184). Nennt man die Seitenkräfte in der Richtung AB bezw. X und X_1, rechtwinklig dazu Y und Y_1 und bedenkt, dass, wenn AB mit der Wagerechten

den Winkel α bildet, Q in $Q \sin \alpha$ und $Q \cos \alpha$ zerlegt werden kann, so lauten die Gleichungen der Kräftesummen in den beiden Achsenrichtungen

$$1) \qquad X + X_1 - Q \sin \alpha = 0$$

$$2) \qquad Y + Y_1 - Q \cos \alpha = 0 .$$

Die Momente beziehen wir zweckmässig auf eine der Befestigungsachsen z. B. A, weil dann die unbekannten Kräfte X, X_1 und Y aus der Momentengleichung fortbleiben; auch führen wir in diese Gleichung zweckmässig die ursprüngliche Kraft Q, nicht aber ihre Seitenkräfte ein. Dann ist nach den Bezeichnungen der Figur

$$3) \qquad 0 = - Y_1 l + Q a \quad \text{oder} \quad Y_1 = \frac{Q a}{l} .$$

In den Gleichungen 2 und 3 kommen nur die Unbekannten Y und Y_1 vor, die daraus also zu bestimmen sind. Für X und X_1 steht aber nur die Gleichung 1 zur Verfügung. Von diesen Kräften ist also nur die Summe bestimmbar, nicht aber die einzelnen Antheile. In der Richtung AB kann der Körper bei der Befestigung jede beliebige Anspannung erfahren, die sich im Allgemeinen nicht erkennen lässt. Befestigt man z. B. ein hölzernes Brett mittels zweier Drahtstifte A und B an einer Holzwand, so kommt es bezüglich der Grösse von X und X_1 auf die Art der Eintreibung der Drahtstifte an; durch die letzten Schläge kann man erreichen, dass zwischen den Stellen A und B in dem Körper eine innere Zugkraft oder Druckkraft entsteht, deren Grösse die Widerstände X und X_1 beeinflusst, bei Annahme starrer Körper aber völlig unbestimmbar ist.

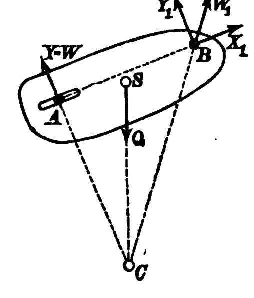
Die in zweckmässiger Weise aufgestellte Momentengleichung 3 hat die gute Eigenschaft, dass darin nur eine einzige Unbekannte vorkommt. Setzt man Y_1 nach Gl. 3 in Gl. 2 ein, so entsteht

$$4) \qquad Y = Q \left(\cos \alpha - \frac{a}{l} \right) = Q \left(\frac{a + b}{l} - \frac{a}{l} \right) = Q \frac{b}{l} .$$

Unmittelbar aber kommt man zu diesem Ergebnisse, wenn man die Gleichung der Kräftesumme in der Y-Richtung ganz fortlässt und dafür nochmals eine Momentengleichung anschreibt, jedoch in Bezug auf einen von A abweichenden Drehpunkt, den man so wählen muss, dass in der Gleichung womöglich nur diejenige Unbe-

kannte vorkommt, um deren Auffindung sich's gerade handelt, in diesem Falle also Y. Das wird erreicht durch die Wahl von B als Drehpunkt, nämlich

Fig. 185.



$$5)\quad 0 = Yl - Qb \quad \text{oder} \quad Y = Q\frac{b}{l},$$

wie in Gl. 4.

Von dieser Bevorzugung der Momentengleichungen in Bezug auf immer neue Drehpunkte wird in der Folge häufig Anwendung gemacht werden. Nur muss man nicht erwarten, dadurch die Zahl der überhaupt verfügbaren Gleichungen vergrössern zu können. Für das Gleichgewicht von Kräften in einer Ebene giebt es drei von einander unabhängige Gleichungen, mag man dieselben für Kräftesummen oder für Momente aufstellen. Vergrössert man die Zahl der Momentengleichungen durch Wahl immer neuer Drehpunkte, so bleiben die Gleichungen nicht mehr von einander unabhängig, so dass dadurch für eine unlösbare Aufgabe nichts gewonnen wird.

Fig. 186.

Die vorstehend behandelte Aufgabe verliert ihre Unbestimmtheit, wenn an einer der beiden Stellen, z. B. bei A, die Befestigung so geändert wird, dass über die Richtung des Widerstandes W keine Unbestimmtheit herrscht, indem man, statt den hindurchgesteckten Bolzen oder Drahtstift von dem Körper rings umschliessen zu lassen, etwa einen länglichen Schlitz anbringt. Hat der Schlitz wie in Fig. 185, die Richtung von A nach B, so kann bei A ein Widerstand X gar nicht geleistet werden; es wird $X = 0$ und $Y = W$; mithin $X_1 = Q \sin \alpha$, womit die Widerstände sämmtlich bestimmt sind. Auch die geometrische Lösung ist jetzt leicht möglich: Verlängert man die nun gegebene Richtung von W bis zum Schnitte C mit Q, so sind W und W_1 nach Fig. 183, S. 157, leicht bestimmt. Auch erkennt man, dass die zeichnerische Behandlung

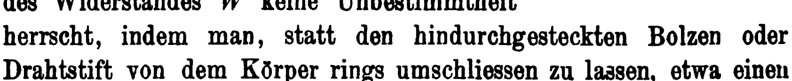
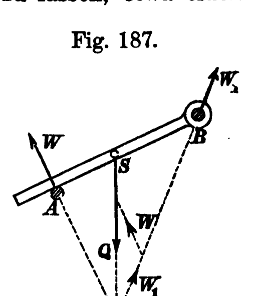


Fig. 187.





von gleicher Einfachheit ist, welche Richtung auch der Schlitz haben mag, wenn man nur die Richtung eines der Widerstände W oder W_1 bestimmt zu erkennen vermag (Fig. 186).

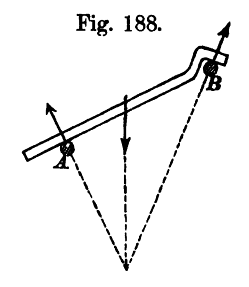


Fig. 188.

In Fig 187 ist die Richtung von W durch den runden Auflagerungsbolzen A gegeben, dadurch der Punkt C und die Richtung von W_1 bestimmt, und man erkennt, dass nun auch eine völlige Umschliessung des Bolzens B nicht mehr nöthig wäre, sondern eine Stützung nach Fig. 188 für das Gleichgewicht hinreichen würde. Fig. 187 bietet nur eine grössere Sicherheit gegen Störungen des Gleichgewichts durch Erschütterungen, Stösse und das Hinzutreten neuer Kräfte. Scheinbar unwesentliche Änderungen der Form des Körpers in der Nähe der Unterstützungsstellen haben zuweilen sehr wichtige Folgen. Biegt man z. B. den Stab der Fig. 189 an seinem oberen Ende derartig um, dass er den Bolzen B mit einer wagerechten Ebene berührt (Fig. 190), so wird W_1 lothrecht, der Schnittpunkt von W und W_1 rückt in unendliche Ferne, und dadurch wird W ebenfalls lothrecht, so dass nun die bei Fig. 189 erforderlich gewesene seitliche Sicherung bei A entbehrlich wird. Die Grössen von W und W_1 ergeben sich mittels der Momentengleichungen zu $W = Q\,b : l$; $W_1 = Q \cdot a : l$.

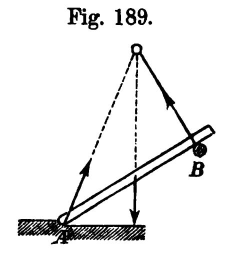


Fig. 189.

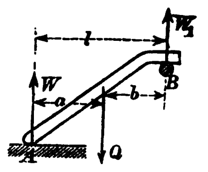


Fig. 190.

Auflagerung der Dachsparren auf Dachpfetten. Die Dachpfette möge die Form eines aufrecht stehenden Rechtecks haben (Fig. 191); der Sparren sei für die Auflagerung entsprechend ausgeschnitten. An den lothrechten Berührungsstellen kann keine Kraft auftreten, denn es müsste $H + H_1 = 0$ sein, und weil keine dieser Kräfte negativ werden kann, so müssen beide Null sein. An den wagerechten Berührungsstellen treten die lothrechten Widerstände A und B auf, die sich genau berechnen wie im vorhergehenden Falle.

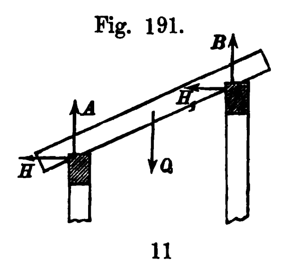


Fig. 191.

Das Gewicht der Dachsparren übt daher auf die die Pfetten tragenden Wände nur lothrechte Drücke (das Entgegengesetzte von A und B) aus, wenn man von der Reibung absieht.

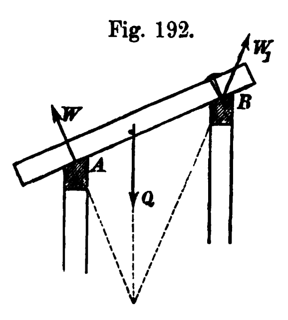


Fig. 192.

Anders ist aber die Sache, wenn die Pfetten für die Auflagerung der Sparren schräg abgeschnitten sind (Fig. 192). Ist dann etwa nur bei B eine Nagelung ausgeführt, nicht aber in A, so werden die Widerstände W und W_1 beide schräg. Die Entgegengesetzten derselben wirken auf die Tragwände der Pfetten.

Die Richtung der Widerstände wird durch die gegenseitige Höhenlage der Stützflächen nicht beeinflusst; besonders häufig ist die Auflagerung eines wagerechten Balkens auf zwei Stützflächen (Fig. 193). Dann wird wiederum, wenn Q das Gesammtgewicht des Balkens (einschl. etwaiger Last) bezeichnet,

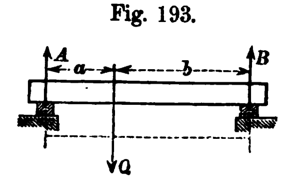


Fig. 193.

$$6) \qquad A = Q\frac{b}{l}; \quad B = Q\frac{a}{l}.$$

Liegt die Last Q in der Mitte, so wird natürlich $A = B = {}^1/_2\, Q$; rückt dann die Last näher an das linke Auflager, so wird dieses mehr belastet, das andere weniger. Der Abstand l der beiden Auflagerdrücke ist die rechnungsmässige Spannweite des Balkens. Um die Formel $B = Q\, {}^a/_l$ sofort zu erkennen, denkt man sich den Balken als Hebel mit dem Drehpunkte bei A und stellt sich die Kraft B als Hubkraft einer Hand vor, dann erscheint $a : l$ sofort als das Hebelverhältnis.

Fig. 194.

Eine Thür (Fig. 194) stützt sich drehbar auf zwei Zapfen. Das den Zapfen umschliessende Thürband berührt die Cylinderfläche und erfährt von dieser einen wagerechten Widerstand Y; es stützt sich aber auch auf die untere Verdickung des Zapfens und erfährt dort einen lothrechten Widerstand X. Daher treten an jedem Zapfen zwei unbekannte Kräfte auf. Wäre die Thür

nur bei B gehalten, so würde sie durch Q rechtsherum gedreht werden; dem muss bei A ein nach links gerichteter Druck Y widerstehen. Nach der Gleichung der wagerechten Kräfte muss bei B der gleiche Druck Y nach rechts wirken. Die Gleichung der lothrechten Kräfte verlangt $X + X_1 = Q$; weiteres ist über X und X_1 nicht zu finden: wie sich das Gewicht Q auf beide Zapfen vertheilt, hängt von der Genauigkeit der Ausführung ab. Y ist aber durch die Momentengleichung, etwa um B, leicht zu berechnen: $0 = Qb - Yh$, oder $Y = Qb : h$.

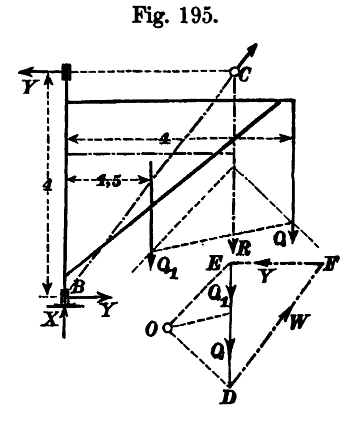
Bei näherer Besichtigung einer Thür wird man zuweilen finden, dass an einem der beiden Zapfen das Thürband mit der unteren Verdickung des Zapfens nicht in Berührung ist, dass daselbst ein Spielraum, eine offene Fuge sich zeigt. An einer solchen Stelle findet dann auch keine Druckübertragung statt, und es wird das Gewicht Q der Thür in solchem Fall allein von dem anderen Zapfen getragen.

Bei wichtigen Fällen, d. h. wenn grosse Kräfte auftreten, ist eine derartige Unbestimmtheit der Kraftwirkung zu vermeiden. Daher trifft man dann die Einrichtung so, dass die Kraft X nur an einer Unterstützungsstelle überhaupt auftreten kann, indem man an der anderen Stelle eine Berührung nur an der cylindrischen Fläche zulässt. Z. B. an dem Dreh-Krahne (Fig. 195). Hier muss (mit $Q = 3000$, $Q_1 = 2000$ kg) $X = Q + Q_1 = 5000$ kg, und in Bezug auf den unteren Stützpunkt B

$$0 = - Y 4 + 2000 \cdot 1{,}5 + 3000 \cdot 4$$

mithin $Y = 3750$ kg sein. Man kann die Aufgabe auch rein zeichnerisch lösen: Nach irgend einem Mafsstabe trägt man in einer Nebenfigur Q_1 und Q zu einem Krafteck an einander, wählt einen beliebigen Pol O, zeichnet zu den Polstrahlen ein Seileck in der Hauptfigur, deren äusserste Seiten durch ihren Schnittpunkt die Lage des Gesammtgewichtes $R = 5000$ bestimmen. Mit dieser Kraft R müssen nun der wage-

Fig. 195.



rechte Widerstand Y des oberen Lagers und der schräge Gesammtwiderstand W des unteren Lagers im Gleichgewichte sein, sich also auf ihr schneiden. Der Schnitt C von Y und R bestimmt sonach die Richtung BC von W. Zieht man im Krafteck EF wagerecht, $DF \parallel BC$, so ist $DF = W$ und $FE = Y$.

6. Dreifach und mehrfach befestigter bezw. unterstützter Körper.

Hat ein Körper drei feste Punkte, so lässt sich der Widerstand jedes der Punkte in je drei Seitenkräfte zerlegen; man hat also 9 Unbekannte. Die Zahl der Gleichgewichts-Bedingungen beträgt im Allgemeinen 6, mithin fehlen 3 Gleichungen zur völligen Bestimmung der Kräfte, oder die Aufgabe ist dreifach statisch unbestimmt.

Ist aber der Körper ein nur lothrecht belasteter dreibeiniger Tisch oder Schemel, der sich an drei Stellen auf eine wagerechte Ebene stützt, so sind von den drei Widerständen die Richtungen bekannt und die Grössen gesucht. Benutzt man die Lothrechte als z-Richtung, so sind von den 6 Gleichgewichts-Bedingungen (S. 146) benutzbar: Gl. 3, 4 und 5, und diese genügen zur Bestimmung der 3 Unbekannten; doch wendet man zur Bestimmung der Unbekannten vortheilhaft nur Momenten-Gleichungen an in Bezug auf Drehachsen durch je 2 Stützpunkte. Die lothrechten Widerstände A, B und C sind zu berechnen. Die Richtungslinie des Gewichtes Q des belasteten Tisches schneide die Unterstützungsebene in D (Fig. 196). Für die Achse AB gilt:

Fig. 196.

$$0 = -C \cdot CF + Q \cdot DE, \text{ also}$$

$$1) \qquad C = Q \cdot \overline{DE} : \overline{CF}.$$

In entsprechender Weise findet man A und B.

Ist der Tisch nur einfach auf den Boden gestellt ohne Bindemittel und ohne Verklammerung, so können die Widerstände nicht negativ werden. Es wird aber $C = 0$, wenn $DE = 0$, d. h. wenn

Q durch die Seite AB des Unterstützungsdreiecks geht. Liegt D ausserhalb dieses Dreiecks, so ist Gleichgewicht nicht möglich, vielmehr kippt der Tisch dann um eine der Seiten des Dreiecks ABC.

Fällt D in den Schwerpunkt des Dreiecks ABC, so wird $C = {}^1\!/_3\, Q$, und ebenso gross werden A und B, so dass in diesem Falle das Gewicht sich gleichmässig auf die 3 Stützpunkte vertheilt.

Tritt zu dem Gewicht Q noch eine wagerechte Kraft K, so können die lothrechten Widerstände nicht mehr Gleichgewicht herbeiführen, sondern es müssen an den Auflagerstellen noch wagerechte Widerstände hinzutreten. Diese werden in Wirklichkeit bis zu einem gewissen Grade durch die Reibung geliefert; wir wollen statt dessen hier annehmen, dass eine vorgelegte Leiste die Verschiebung hindere. Es ist dann ausser dem Ruhezustande nur ein Kippen um die Leistenkante möglich.

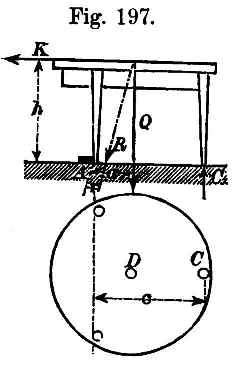


Fig. 197.

Ersetzt man Q und K durch ihre Mittelkraft R, welche rechts von A im Abstande r vorbeigeht, so wird

$$Cc = Rr \quad \text{oder} \quad C = Rr : c.$$

Gleichgewicht ist nur möglich, solange r positiv ist, d h. innerhalb des Unterstützungsdreiecks durch die Grundebene hindurchgeht Zugleich ist aber auch $Rr = Qa - Kh$. Es ist also Gleichgewicht nur möglich, solange $Qa \geqq Kh$. Qa heisst das Standsicherheitsmoment (Stabilitätsmoment) in Bezug auf die Kante A, Kh das Umsturzmoment. Der Körper ist nur im gesicherten Gleichgewichte, solange das Standsicherheitsmoment grösser als das Umsturzmoment.

Stützt sich ein Körper an mehr als drei Stellen auf eine wagerechte Ebene, so sind die Widerstände der Stützpunkte nicht mehr zu ermitteln. In geometrischer Beziehung ist die Ebene, in welcher der Körper die Unterstützungsfläche berührt, durch mehr als drei Punkte bestimmt, also überbestimmt, während, wenn die Unterstützungsstellen nicht genau eine Ebene bilden, ein Wackeln des Körpers bei Verschiebung der Last eintreten kann. Ein dreibeiniger Tisch kann nicht wackeln, ein mehrbeiniger aber bekanntlich sehr leicht; es hängt damit die Unbestimmtheit der Druckvertheilung zusammen.

Bezüglich der Sicherheit gegen ein Umsturzmoment gilt für einen vierbeinigen Tisch das Gleiche wie für einen dreibeinigen.

Ruht ein Körper unter Einwirkung seines Gewichtes Q mittels ebener Fläche auf wagerechter Ebene (Fig. 198), so müssen die lothrecht aufwärts gerichteten Widerstände der Flächentheilchen eine Mittelkraft N liefern, die durch den Schwerpunkt S des Körpers geht. Nach welchem Gesetze sich aber N auf die Berührungsfläche vertheilt, ist statisch unbestimmt. Da nun die Mittelkraft zweier Parallelkräfte gleichen Sinnes nach S. 102 zwischen den Parallelkräften liegt, so kann auch die Mittelkraft N nur innerhalb des Bereiches der Grundfläche liegen, oder es ist für Gleichgewicht erforderlich, dass die Schwerpunktslothrechte innerhalb des Bereiches der Grunfläche bleibe; andernfalls tritt ein Kippen um eine Drehkante ein, z. B. in Fig. 199 um A.

Fig. 198.

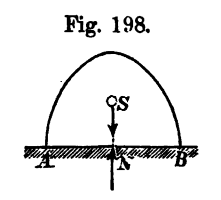
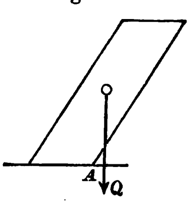
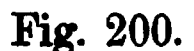
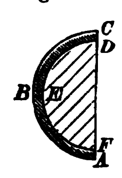


Fig. 199.



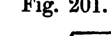
Hat aber der Umfang der Grundfläche einspringende Theile (Fig. 200), so ist nicht erforderlich, dass die Schwerpunktslothrechte durch die wirkliche engschraffirte Berührungsfläche hindurchgehe; vielmehr erhält man den für die Standsicherheit massgebenden Bereich der Grundfläche, indem man die wirkliche Berührungsfläche so weit ergänzt, dass einspringende Winkel fortfallen. Denn eine Seite oder Tangente der Grundfläche kann nur dann zu einer Drehkante werden, wenn ihre Verlängerung die Berührungsfläche nicht mehr durchschneidet. Sämmtliche Tangenten, die man an den einspringenden Bogen FED der Figur legt, sind keine möglichen Drehkanten. Es muss daher die leichte schraffirte Halbkreisfläche FED mit zu dem Bereiche der Grundfläche gerechnet werden, aus dem die Schwerpunktslothrechte nicht hinaustreten darf. Der Bereich der Grundfläche ist diejenige ebene Fläche, welche umschlossen wird von einer beweglichen Geraden, die die Unterstützungsfläche umhüllt, d. h. sich so um dieselbe bewegt, dass sie sie stets berührt, ohne sie aber zu schneiden.

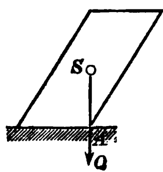

Fig. 200.



Bekanntlich kann ein zusammengebogenes Papier- oder Kartenblatt auf einem Tische sicher stehen, wiewohl die Schwerlinie nicht durch die schmale Auflagerfläche hindurch geht. Ebenso bildet bei dem Tische (Fig. 196, S. 164) die gesammte Dreieckfläche ABC den Bereich der Grundfläche.

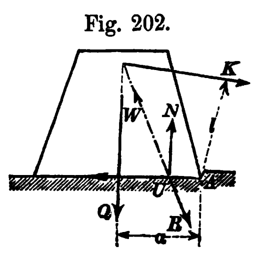
Geht die Schwerpunkts-Lothrechte gerade durch eine mögliche Drehkante (Fig. 201), so ist der Ruhezustand unsicher. Der Widerstand des Bodens vertheilt sich nicht mehr über die Berührungsfläche, sondern wird nur noch von der Drehkante geleistet.


Fig. 201.



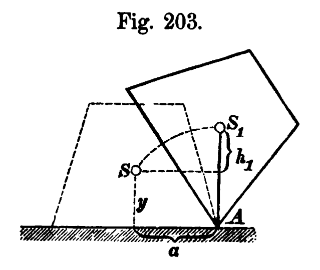
Tritt zu dem Gewichte Q des Körpers noch eine beliebig gerichtete Kraft K hinzu, die mit Q in derselben Ebene liegt (Fig. 202), so kann man die Mittelkraft R beider bestimmen, und letztere muss durch den Widerstand W des Bodens aufgehoben werden, wenn der Körper in Ruhe bleiben soll. Die seitliche Verschiebung im Sinne der wagerechten Seitenkraft von K sei durch einen Vorsprung am Boden verhindert; dann kommt nur noch die Möglichkeit der Drehung um die Kante in Frage, deren Verschiebung durch den Vorsprung gehindert ist. Der Boden kann innerhalb des Bereiches der Grundfläche jeden beliebigen Normalwiderstand N leisten, der Vorsprung einen seitlichen Widerstand von beliebiger Grösse; der aus beiden sich zusammensetzende Gesammtwiderstand W kann daher innerhalb des Bereiches der Grundfläche jede beliebige Grösse und Richtung haben, kann aber nicht aus diesem Bereiche heraustreten. Es muss daher die Lage von R die Unterstützungsebene ebenfalls im Bereiche der Grundfläche schneiden, wenn der Körper soll in Ruhe bleiben können. Ist der Hebelarm von Q in Bezug auf die Drehkante A wieder a, der der Kraft K aber l, so ist wieder Standsicherheit vorhanden, wenn $Qa > Kl$, d. h. wenn das Sicherheitsmoment grösser als das Umsturzmoment. Für $Kl = Qa$ geht die Mittelkraft R aus K und Q durch die Drehkante, und der Körper ist im unsicheren Gleichgewichte. Wird Kl im geringsten grösser als Qa, so wird der Körper sich um die Kante A drehen.

Fig. 202.



Erfolgt diese Drehung, so beschreibt der Schwerpunkt S (Fig 204) einen Kreisbogen um A, die Richtungslinie des Gewichtes Q rückt der Kante immer näher, das Moment von Q wird immer kleiner und endlich zu Null, sobald der Schwerpunkt in S_1 lothrecht über A liegt. Setzen wir voraus, dass die umstürzende Kraft K in der Weise abnehme, dass ihr Moment stets gleich dem Momente von Q in Bezug auf A sei, so wird das Moment ihrer Mittelkraft R stets Null sein, R also stets durch A gehen. Es wird dann ein langsames, allmähliches Aufkippen des Körpers möglich sein. Die hierzu von der Kraft K zu leistende Arbeit kann man leicht berechnen. Die Bewegung erfolge so langsam, dass bei der höchsten Lage des Schwerpunktes die Geschwindigkeit aller Punkte des Körpers Null sei. Dann ist, von der sicheren Ruhelage aus gerechnet, die Zunahme am Arbeitsvermögen Null. Mithin muss auch die Arbeitssumme Null sein. Nach S. 144 verrichten aber die inneren Kräfte die Arbeit Null, der in der Drehkante A auftretende Widerstand W verrichtet auch die Arbeit Null, weil sein Angriffspunkt sich nicht bewegt; mithin muss die Arbeit von Q und K zusammen Null sein. Bei einer Hebung des Schwerpunktes um h_1 ist aber (nach S. 139) die Arbeit der Schwerkraft $-Qh_1$, folglich ist die Arbeit zum völligen Aufkippen des Körpers

Fig. 203.



$$1)\qquad \mathfrak{A} = Qh_1.$$

Diese Arbeit heisst die dynamische Standsicherheit, sie kommt in Frage, wenn es sich darum handelt, ob ein Körper durch einen Stoss oder Wurf umzustürzen ist. In einem geworfenen Körper steckt ein bestimmtes Arbeitsvermögen; trifft er einen aufgestellten Körper, so kann ein gewisser Theil des Arbeitsvermögens zum Umstürzen wirksam werden.

Das Standsicherheitsmoment war das zum ersten Anheben erforderliche Moment und unabhängig von der Höhenlage des Schwerpunktes. Die zum völligen Aufkippen erforderliche Arbeit $\mathfrak{A}$

aber ist auch von der Höhe y des Schwerpunktes abhängig. Es ist nämlich (Fig. 203)

$$AS = AS_1 = \sqrt{a^2 + y^2};\ h_1 = AS_1 - y = \sqrt{a^2 + y^2} - y,$$

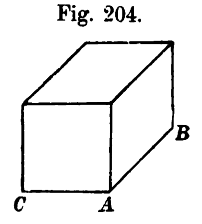
was man aber, wenn man mit $\sqrt{a^2 + y^2} + y$ multiplizirt und dividirt, auch schreiben kann

$$h_1 = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + y^2} + y}, \text{ oder}$$

2)
$$\mathfrak{A} = Q a \frac{a}{\sqrt{a^2 + y^2} + y}.$$

Man erkennt, dass bei gleich bleibendem a die Arbeit $\mathfrak{A}$ um so kleiner wird, je höher der Schwerpunkt liegt. Körper mit hoch liegendem Schwerpunkte lassen sich also durch einen Stoss verhältnismässig leicht umstürzen.

Fig. 204.

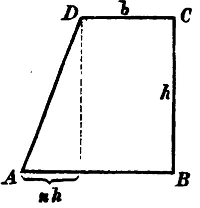


Beispiel: Ein parallelepipedischer Steinkörper (Fig. 204) von $1 \times 1 \times 2$ m wiegt, wenn $\gamma = 2000$ kg, $Q = 4000$ kg. Liegt er mit einer Langseite auf dem Boden, so ist $a = 0{,}5$ m, $y = 0{,}5$ m, daher das Moment zum ersten Aufkippen $\mathfrak{M} = Q a = 4000 \cdot 0{,}5 = 2000$ mkg. Oder es muss unter der linksseitigen Steinkante eine Hubkraft $K = 2000$ kg wirksam sein. Die Arbeit zum völligen Aufkippen, so dass er dann von selbst weiter umkippt, ist

$$\mathfrak{A} = Q a \frac{0{,}5}{\sqrt{0{,}5^2 + 0{,}5^2} + 0{,}5} = \frac{2000}{\sqrt{2} + 1} = 2000 (\sqrt{2} - 1)$$
$$= 2000 \cdot 0{,}414 = 828 \text{ mkg}.$$

Steht aber der Körper hochkantig, so ist $a = 0{,}5$ m, $y = 1$ m, mithin ist $\mathfrak{M}$ ebenso gross wie vorher, dagegen $\mathfrak{A} = Q a (\sqrt{1 + 4} - 2) = 2000 \cdot 0{,}236 = 472$ mkg, also erheblich kleiner.

Fig. 205.



Eine Mauer von trapezförmigem Querschnitte (Fig. 205) habe eine Höhe h, eine obere Breite b; der Grundriss der geneigten Seite AD betrage nh; dann setzt sich das Standsicherheitsmoment aus den Beiträgen des rechteckigen und des dreieckigen Theiles zusammen, in welche man den Querschnitt zerlegen kann. Für eine

Länge = 1 rechtwinklig zur Zeichenebene ist dann in Bezug auf die Kante A das Standsicherheitsmoment $\mathfrak{M}_a$:

$$\mathfrak{M}_a = \gamma h \left\{ b\left(\tfrac{1}{2} b + nh\right) + \tfrac{1}{2} nh \cdot \tfrac{2}{3} nh \right\}$$
$$= \gamma h \left\{ \tfrac{1}{2} b^2 + b\, nh + \tfrac{1}{3} n^2 h^2 \right\}.$$

In Bezug auf die Kante B:

$$\mathfrak{M}_b = \gamma h \left\{ \tfrac{1}{2} b^2 + \tfrac{1}{2} nh \left(b + \tfrac{1}{3} nh\right) \right\}$$
$$= \gamma h \left\{ \tfrac{1}{2} b^2 + \tfrac{1}{2} b\, nh + \tfrac{1}{6} n^2 h^2 \right\},$$

mithin $\mathfrak{M}_a > \mathfrak{M}_b$, weil der Gesammtschwerpunkt näher an B als an A liegt. Würde man das Trapez mit einem flächengleichen Rechtecke von der Höhe h und der Breite $b + \tfrac{1}{2} nh$ vertauschen, so betrüge das Standsicherheitsmoment nur

$$\mathfrak{M} = \gamma h \, \tfrac{1}{2} \left(b + \tfrac{1}{2} nh\right)^2$$
$$= \gamma h \left\{ \tfrac{1}{2} b^2 + \tfrac{1}{2} b\, nh + \tfrac{1}{8} n^2 h^2 \right\},$$

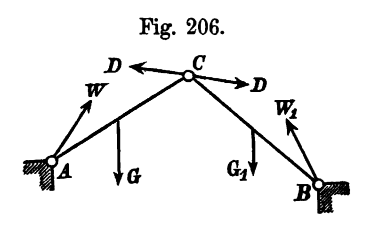
also wiederum weniger als $\mathfrak{M}_b$.

7. Gleichgewicht einer Verbindung von Gelenkstangen.

Unter einer Gelenkstange verstehen wir einen starren Körper, der an zwei Stellen mit sog. Augen versehen ist, in welchen cylindrische, einander parallele Bolzen angebracht sind. Mittels dieser Bolzen sind die Körper mit einander bezw. mit festen, unbeweglichen Widerlagern derartig verbunden, dass in den Gelenken nur Kräfte auftreten können, welche durch die Achsen der Gelenkbolzen hindurch gehen und zu diesen rechtwinklig stehen. Die Form der Körper ist im Übrigen gleichgültig, dieselben können die Gestalt von geraden oder einfach gekrümmten Stäben haben; der Einfachheit wegen mögen sie geradlinig gezeichnet werden. Die Reibung an den Bolzen wird vernachlässigt.

Verbindung zweier Gelenkstäbe. In A und B (Fig. 206) seien die Stäbe mit Widerlagergelenken verbunden, bei C greifen sie gelenkartig in einander. G und G_1 seien die Gesammtlasten der linken bezw. rechten Stange mit den wagerechten Abständen c und c_1 von A bezw. B. Es seien b und b_1 die wagerechten, h und h_1 die senkrechten Projektionen der Stangen. Den Widerstand W

Fig. 206.



des Widerlagergelenks A zerlegen wir in A (senkrecht) und X (wagerecht); den Widerstand W_1 des Gelenks B in B bezw. X_1, während die gegenseitige Kraft D, welche die Gelenkstangen bei C auf einander ausüben, in V (senkrecht) und H (wagerecht) zerfallen möge.

Soll die Verbindung im Gleichgewichte sein, so muss jede Stange für sich den Gleichgewichtsbedingungen genügen. Da nun für Kräfte in einer Ebene 3 Gleichgewichtsbedingungen aufzustellen sind, so stehen im Ganzen 6 Gleichungen zur Verfügung, mittels deren die Unbekannten A, X, B, X_1, H und V bestimmt werden können.

Fig. 207.

Zuerst sollen die gegenseitigen Kräfte im Gelenke C berechnet werden. Dass an der linksseitigen Stange H nach links wirken muss, erkennt man leicht; der Sinn von V ist vorläufig unbestimmt; wir nehmen ihn nach oben an. Bei der Momentengleichung in Bezug auf A (Fig. 207) fallen A und X aus, und man erhält einfach: $0 = -Hh - Vb + Gc$. An der rechtsseitigen Stange (Fig. 208) müssen H und V entgegengesetzt angebracht werden, und man erhält: $0 = Hh_1 - Vb_1 - G_1c_1$.

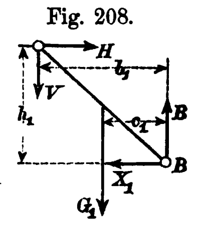


Fig. 208.

Aus beiden Gleichungen folgt:

1) $$H = \frac{Gcb_1 + G_1c_1b}{bh_1 + b_1h}$$

2) $$V = \frac{Gch_1 - G_1c_1h}{bh_1 + b_1h}.$$

Wird hierbei V negativ, so ist es in Fig. 207 abwärts, in Fig. 208 aufwärts gerichtet.

Weiter folgt dann leicht an der linken Stange:

3) $A = G - V;\quad X = H;$

an der rechten:

4) $B = G_1 + V;\quad X_1 = H.$

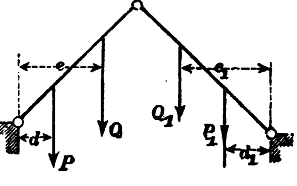


Fig. 209.

Wirken aber an jeder Stange zwei Lasten P und Q bezw. P_1 und Q_1 (Fig. 209), so kann man P und Q durch ihre Mittelkraft G, P_1 und Q_1 durch ihre Mittelkraft G_1 ersetzen, u. zw. ist dann einfach

$$Gc = Pd + Qe;\quad G_1c_1 = P_1d_1 + Q_1e_1.$$

Führt man dies in die Gl. 1 und 2 ein, so entsteht:

$$5)\qquad H = \frac{P d b_1 + Q e b_1 + P_1 d_1 b + Q_1 e_1 b}{b h_1 + b_1 h} \quad \text{und}$$

$$6)\qquad V = \frac{P d h_1 + Q e h_1 - P_1 d_1 h - Q_1 e_1 h}{b h_1 + b_1 h}.$$

In diesen Gleichungen ist jede der 4 Lasten durch ein besonderes, von den anderen unabhängiges Glied vertreten; fallen die Lasten Q, Q_1 und P_1 fort, bleibt also nur P, so wird

$$H = \frac{P d b_1}{b h_1 + b_1 h}; \quad V = \frac{P d h_1}{b h_1 + b_1 h}.$$

Jede der Lasten liefert hiernach zu den Kräften H und V ihren bestimmten, unabhängigen Beitrag; man kann daher beim gleichzeitigen Vorhandensein beliebig vieler Lasten den Einfluss jeder einzelnen Last auf H und V besonders ermitteln und braucht die einzelnen Beträge dann nur mit Rücksicht auf ihre Vorzeichen zu summiren. Das eigene Gewicht der Stangen wird ebenso wie jede Last behandelt; man kann daher die Stangen als an und für sich gewichtlos betrachten.

Eine unbelastete und gewichtlos gedachte Gelenkstange hat aber Eigenschaften, die für die Berechnung der Stangenverbindungen sehr wichtig sind (A. Ritter, Technische Mechanik). An einer solchen Stange müssen die Gelenkdrücke W und D sich allein im Gleichgewichte halten, also gleich und entgegengesetzt sein und in dieselbe Gerade fallen (Fig. 210), d. h. in die gerade Verbindungslinie beider Gelenke. Oder es gilt der Satz:

Fig. 210.

Eine gewichtlose unbelastete Gelenkstange kann nur Widerstände in der Richtung der Verbindungsgeraden ihrer Gelenke ausüben.

Sind die Pfeilspitzen der an beiden Gelenken auftretenden Kräfte einander zugewandt, wie in Fig. 210, so erfährt die Stange Druck. Denken wir uns die Stange an irgend einer Stelle zwischen den Gelenken durchschnitten, so haben wir an der Schnittstelle eine innere Spannkraft S anzubringen, welche die Wirkung des

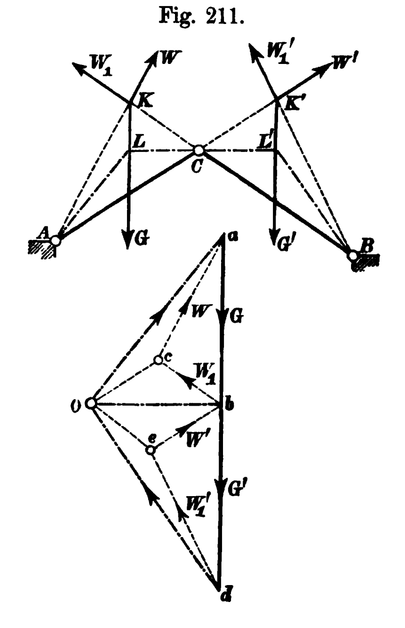


abgeschnittenen Stückes ersetzt; diese Spannkraft ist ebenfalls $= D$ und ihr entgegengesetzt, oder:

Die Spannkraft einer unbelasteten Stange fällt in die Verbindungsgerade der beiden Gelenkpunkte.

Ist nun (Fig. 211) die linke der beiden Stangen mit G belastet, die rechte einstweilen unbelastet, so übt letztere einen Gegendruck $D = W_1$ in der Richtung BC, welche sich mit G im Punkte K schneidet; durch K muss dann auch der Widerstand W des Gelenkes A hindurchgehen, weil an der Stange AC die drei Kräfte: W_1, G und W sich im Gleichgewichte halten müssen. Nachdem hierdurch die Richtungen von W und W_1 gefunden sind, lässt sich leicht ein Krafteck abc dieser 3 Kräfte zeichnen, aus welchen dann die Grössen W und $D = W_1$ abgegriffen werden können.

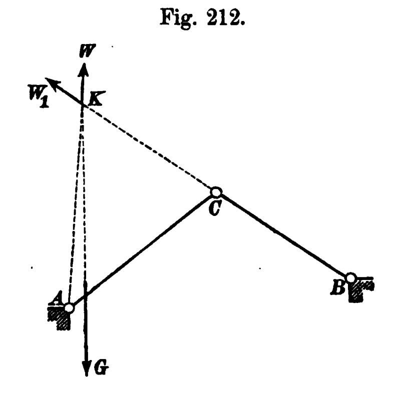
Fig. 211.



Für eine Belastung der rechten Stange mit G' findet man in entsprechender Weise die zugehörigen Widerstände W' und W_1' im Krafteck bde. Sind nun die Lasten G und G' gleichzeitig vorhanden, so treten auch die entsprechenden Widerstände gleichzeitig auf. Der Gesammtwiderstand im Punkte A ist dann die Mittelkraft aus W und W'. Diese ist aber leicht zu finden, wenn man aus bc und eb ein Parallelogramm $Ocbe$ zeichnet; dann finden sich $Oc = W'$ und $ca = W$ an einander gereiht, und ihre geometrische Summe Oa ist der Gesammtdruck W_a in A. Ebenso ist dO der Gesammtdruck W_b in B. Bringt man diese Gesammtkräfte in A und B an, so schneiden sie G und G' in Punkten L und L', durch welche auch der Gesammtdruck des Gelenkes C hindurch gehen muss, die deshalb mit C in einer Geraden liegen müssen, und zwar muss diese Gerade $LCL' \parallel Ob$ sein, weil Ob den Gesammtdruck des Gelenkes C nach Richtung und Grösse darstellt.

Rückt die Last G (Fig. 212) dem Widerlagergelenke A näher und näher, so verschiebt sich der Schnittpunkt K der drei Kräfte auf der Verlängerung von BC mehr und mehr nach oben, und die Richtung von W nähert sich mehr und mehr der Lothrechten. Im Grenzfalle, wo G mit A zusammenfällt, wird W lothrecht, fällt also mit G in dieselbe Richtung; aus diesem Grunde wird die dritte Kraft $D = W_1$ (nach S. 63) = Null; die Last G wird unmittelbar von dem festen Gelenkpunkt A auf das Widerlager übertragen; im Gelenke C tritt gar keine Kraft auf, und die Stangenverbindung bleibt ohne innere Spannkräfte. Also:

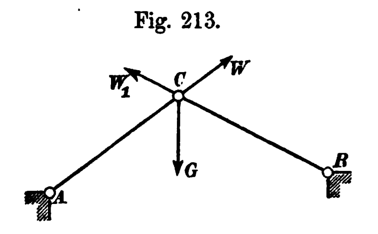
Fig. 212.



Eine Last, die an einem Widerlagergelenkpunkt einer Stangenverbindung angreift, bringt in der Stangenverbindung selbst keine Spannkräfte hervor.

Rückt aber die Last G der linken Stange nach C hin (Fig. 213), so nähert sich der Punkt K mehr und mehr dem Punkte C und fällt mit ihm zusammen, wenn die Last durch C geht. Denkt man sich nun die Stangen durchschnitten, so müssen ihre Spannkräfte beide in die Richtungen AC und BC fallen. Oder:

Fig. 213.



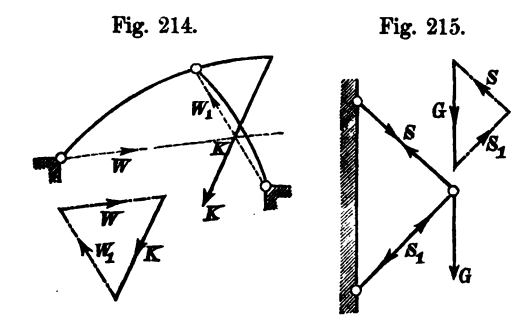
Greifen die Lasten nur in dem gemeinsamen Gelenkpunkte einer Stangenverbindung an, so fallen die Spannkräfte der Stangen in die Verbindungsgeraden der Gelenkpunkte (die Stangenrichtungen).

Die beiden vorstehenden Sätze gelten, wie man leicht erkennt, auch für eine Verbindung von beliebig vielen Stangen.

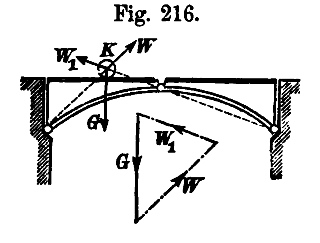
Die Bestimmung der Widerstände der festen Gelenke geschieht in derselben Weise, wie auf S. 173 beschrieben, wenn auch die

einzige vorhandene Last K an der Verlängerung einer Gelenkstange angreift und etwa von der lothrechten Richtung abweicht (Fig. 214).

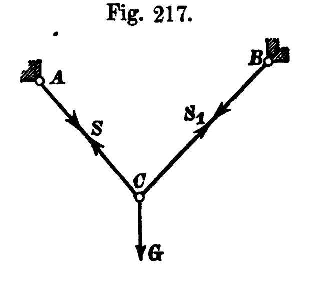
In Fig. 215 ergeben sich leicht die Spannkräfte S und S_1 der beiden Gelenkstangen, und zwar wirkt die Spannkraft S auf Zug, S_1 auf Druck.



Ist bei einem Bogenträger mit drei Gelenken (Fig. 216) nur die linke Hälfte durch eine Einzellast G belastet, so kann, ohne Rücksicht auf die Form, die rechte Hälfte wie eine gewichtlose Stange behandelt werden, so dass die Richtungen der Widerlagerdrücke W und W_1 in einfacher Weise bestimmt sind und daher die Zeichnnng des Kraftecks aus G, W und W_1 ermöglicht ist.



Liegt das gemeinsame Gelenk C oberhalb der Geraden AB, so erfordert eine Last G (Fig. 213, S. 174) schräg aufwärts gerichtete Widerstände W und W_1; diese Kräfte haben nach dem Gesetze der Wechselwirkung das Bestreben, die Widerlager schräg nach unten und aus einander zu drängen; die Stangen erfahren Druckkräfte. Liegt aber C unterhalb AB (Fig. 217), so verkehren sich alle Verhältnisse ins Entgegengesetzte: die Stangen werden gezogen und suchen die Widerlager nach innen zu ziehen.



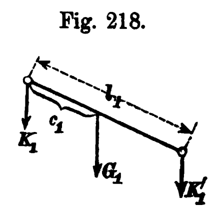
Solche innere Zugkräfte, deren Richtung mit der Verbindungsgeraden zweier Gelenke zusammenfällt, können auch durch ein Seil aufgenommen werden. An Stelle der Gelenke hat man sich dann Seilknoten zu denken.

Verbindung von mehr als zwei Stangen. Eine Verbindung von zwei Gelenkstangen wie Fig. 217 bildet eine bestimmte Figur,

nämlich ein durch drei Seiten bestimmtes Dreieck, weil die festen Punkte A und B die Seite AB festlegen. Eine Verbindung von mehr als zwei Stangen bildet aber eine verschiebliche Figur, weil ein Vieleck von mehr als drei Seiten nicht mehr durch die Seiten allein bestimmt ist. Sind die Längen der Stangen, deren Lasten, und die Widerlagergelenkpunkte A und B gegeben, so giebt es nur eine gesicherte Gleichgewichtslage, welche sich allmählich von selbst einstellt, wenn man die Stangenverbindung der Wirkung der Lasten überlässt. Diese Ruhelage muss zunächst ermittelt werden, bevor man die Widerstände der Befestigungspunkte und die Spannkräfte der Stangen bestimmen kann.

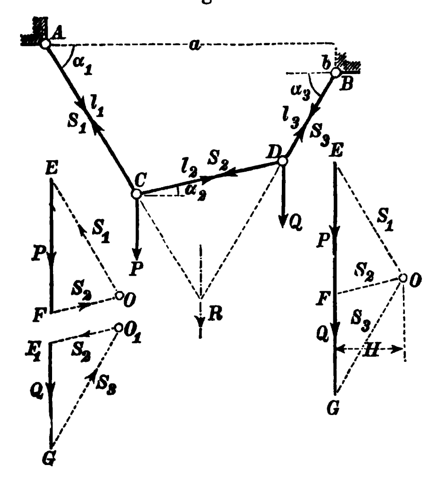
Betrachten wir eine Verbindung von drei Stangen, so sind deren Neigungswinkel α_1, α_2, α_3 in der Gleichgewichtslage unbekannt. Greifen die Lasten irgendwo zwischen den Gelenkpunkten an, so ist es zur Vereinfachung empfehlenswerth, jede Last G durch zwei parallele Seitenkräfte zu ersetzen, die je in einem Gelenk angreifen. Es ist dann (Fig. 218) $K_1 = G_1\left(1 - \frac{c_1}{l_1}\right)$; $K_1{}' = G_1 \frac{c_1}{l_1}$.

Fig. 218.



Verfährt man mit den Lasten der anderen Stangen ebenso, so werden die auf die Widerlagergelenke entfallenden Seitenkräfte, z. B. K_1, unmittelbar von diesen aufgenommen und kommen für das Gleichgewicht der Stangenverbindung weiter nicht in Betracht. An jedem Zwischengelenk aber summiren sich die von links und rechts herrührenden Seitenkräfte und geben zusammen die Gelenkpunktslast. Wir haben dann nur mit Gelenkpunktslasten P und Q zu thun (Fig. 219), und die Spannkräfte der Stäbe können nach dieser Änderung mit Rücksicht auf den Satz S. 174 als in die Stabrichtungen fallend angesehen werden.

Fig 219.



An dem Gelenkbolzen C hängt die Last P; die anschliessenden Stäbe üben auf ihn die Kräfte S_1 und S_2 aus, und diese 3 Kräfte müssen sich das Gleichgewicht halten, weil der Bolzen in Ruhe sein soll. Es müssen daher diese Kräfte ein geschlossenes Krafteck OEF bilden. Da nun S_1 mit der Wagerechten den Winkel α_1 bildet, ist $90^0 - \alpha_1$ der Winkel zwischen S_1 und P; der Winkel bei O im Krafteck beträgt aber für die angenommenen Neigungen $\alpha_1 + \alpha_2$, derjenige bei F ist $90^0 - \alpha_2$. Mithin wird nach dem Sinus-Satze:

$$P : S_2 = \sin(\alpha_1 + \alpha_2) : \cos\alpha_1 .$$

Ebenso müssen die in D angreifenden Kräfte S_2, Q und S_3 ein geschlossenes Dreieck O_1F_1G bilden, für welches die Gleichung gilt:

$$Q : S_2 = \sin(\alpha_3 - \alpha_2) : \cos\alpha_3 .$$

Durch Division ergeben diese beiden Gleichungen:

$$1)\qquad \frac{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)}{\sin(\alpha_3 - \alpha_2)}\,\frac{\cos\alpha_3}{\cos\alpha_1} = \frac{P}{Q}.$$

Dies ist die einzige Beziehung, welche zwischen den gegebenen Lasten und den Gleichgewichts-Neigungen α_1, α_2 und α_3 aufgestellt werden kann. Haben aber die Punkte A und B einen gegebenen wagerechten Abstand a, einen Höhenunterschied b, so müssen diese Werthe gleich sein der algebraischen Summe der wagerechten bezw. senkrechten Projektionen der Stangen, oder

$$2)\qquad l_1\cos\alpha_1 + l_2\cos\alpha_2 + l_3\cos\alpha_3 = a;$$

$$3)\qquad l_1\sin\alpha_1 - l_2\sin\alpha_2 - l_3\sin\alpha_3 = b.$$

Die Gleichungen 1 bis 3 enthalten die Bedingungen für die 3 Unbekannten α_1, α_2 und α_3, sind aber nach diesen Grössen nur durch mühsames Probiren aufzulösen.

In anderer Gestalt lässt sich die Bedingung für die Gleichgewichtsform der Stangenverbindung aussprechen, wenn man die beiden Kraftecke so zusammenschiebt, dass O_1F_1 mit OF zusammenfällt. In der so entstehenden Figur (Fig. 219, rechts) bildet EFG den Streckenzug der gegebenen parallelen Lasten, O den Pol, OE, OF, OG die Polstrahlen, und wenn man nun bedenkt, dass $OE \parallel AC$, $OF \parallel CD$ und $OG \parallel DB$ gezeichnet waren, so ist nach S. 118 der Linienzug $ACDB$ ein zu den Lasten P und Q gezeichnetes Seileck. Die Polstrahlen des Kraftecks geben Grösse und Richtung der Stab-Spannkräfte.

Nach der Bedeutung der Seileckseiten (S. 118) bedeutet DB die Richtungslinie einer Kraft S_3 mit dem Sinne von B nach D, welche die Mittelkraft von S_1 (aufwärts), P und Q darstellt. Nach den Lehren über die Zusammensetzung und das Gleichgewicht der Kräfte am starren Körper würden daher die an einem starren Körper wirkenden Kräfte S_1, P und Q mittels eines Seilecks zu einer Mittelkraft S_3 vereinigt werden können; und eine entgegengesetzt gerichtete Kraft S_3 (mit dem Sinne von D nach B) würde den Kräften S_1. P und Q das Gleichgewicht halten. Bei der Stangenverbindung haben wir nun gezeigt, dass sie unter Einwirkung der Stabkräfte S_1 und S_3 und den Gelenkpunktslasten P und Q im Gleichgewichte sei. Da sich dieselben Kräfte auch am starren Körper im Gleichgewichte halten, so folgt daraus, dass, wenn eine Gelenkverbindung im Gleichgewichte ist, in dem Gleichgewichts- und Kräftezustande nichts geändert wird, wenn man den Gelenken die Beweglichkeit nimmt, also z. B. sie zu einem starren Körper zusammengeschweisst denkt.

Nach der Eigenschaft des Seilecks (S. 119) schneiden sich die Richtungen von S_1 und S_3 auf der Mittelkraft R der Lasten P und Q. Die Spannkräfte S_1, S_2 und S_3 haben im Krafteck übereinstimmende wagerechte Projektion, d. h. übereinstimmende wagerechte Seitenkraft H, gemessen durch den rechtwinkligen Abstand des Poles O von der Lastlinie EFG.

Man erkennt leicht, dass das vorstehend für drei Stangen entwickelte im Wesentlichen auch für beliebig viele, nur in den Gelenkpunkten belastete Stangen gilt; wir fassen dies unter Annahme reibungsloser Gelenke zu folgenden Sätzen zusammen:

1. Die Spannkraft einer jeden Stange fällt mit ihrer Richtung, d. h. mit der Verbindungsgeraden ihrer Gelenke zusammen.

2. An jedem Gelenkpunkte halten die Spannkräfte der beiden benachbarten Stangen der Last des Gelenkpunktes das Gleichgewicht.

3. Die Gleichgewichtsform der Stangenverbindung ist ein zu den Lasten gezeichnetes Seileck.

4. Die Spannkräfte irgend zweier Stangen halten den an den zwischenliegenden Gelenkpunkten angreifenden Lasten das Gleichgewicht (d. h. genügen den Bedingungen für das Gleichgewicht starrer Körper). Die Mittelkraft dieser Lasten geht durch den Schnittpunkt der beiden Spannkräfte.

Die vorstehenden Sätze gelten auch, wenn die Gelenkpunktslasten nicht lothrecht, sondern beliebig gerichtet sind. Werden die Lasten aber ausschliesslich durch lothrechte Kräfte gebildet, so ist noch

5. die wagerechte Seitenkraft aller Spannkräfte von der gleichen Grösse H.

Sind nun n Stangen der Längen l_1, $l_2 \ldots$, $n-1$ Gelenklasten gegeben, so kann man damit unendlich viele Gleichgewichtsformen herstellen. Bei drei Stangen liess sich aus den Gleichgewichtsbedingungen nur eine Gleichung (Gl. 1, S. 177) mit den drei Unbekannten α_1, α_2, α_3 entwickeln; die beiden anderen Gleichungen waren geometrische Bedingungen. Ähnlich ist es auch bei n Stangen: Sind die Abstände a und b der Befestigungspunkte in wagerechtem und lothrechtem Sinne gegeben, so lassen sich ausser den geometrischen Bedingungen nach Art der Gl. 2 u. 3, S. 177, in derselben Weise wie bei drei Stangen noch $n-2$ Gleichgewichtsbedingungen herleiten. Die Auflösung der Gleichungen nach den unbekannten Winkeln α_1, $\alpha_2 \ldots$ ist aber nur durch umständliches Probiren möglich. Viel leichter wird die Aufgabe, wenn statt der gegenseitigen Lage der Befestigungspunkte zwei andere Stücke gegeben sind. Die Neigungswinkel α sind sofort bestimmt, wenn im Kraftеck (Fig. 219, rechts, S. 176) die Lage des Poles gegen den Streckenzug der Lasten gegeben ist. Sind also von irgend einer Spannkraft, z. B. von S_1, wagerechte und senkrechte Seitenkraft gegeben, so steht S_1 nach Grösse und Richtung fest und bestimmt damit den Pol O. Auch die Neigungen zweier Stäbe (d. h. ihrer Spannkräfte) legen den Schnittpunkt der beiden Polstrahlen, d. h. den Pol fest.

In Fig. 219 können die Spannkräfte S_1, S_2, S_3 der Gelenkstangen ebenso gut durch Seilstücke aufgenommen werden. Ein Seil kann wegen seiner Biegsamkeit nur eine in seine Längenrichtung fallende Zugkraft aufnehmen (vergl. S. 64). Das zwischen zwei Knoten befindliche Stück eines gewichtlosen Seiles hat daher dieselbe Grundeigenschaft wie eine gewichtlose und unbelastete Gelenkstange, jedoch mit der noch hinzutretenden Beschränkung, dass im Seile nur Zugkräfte möglich sind. Das Viereck $ACDB$ ist also die Gleichgewichtsform einer in den Knoten C und D belasteten Seilverbindung. Hiermit erklärt sich die S. 118 (nach dem Vorschlage von G. Lang) eingeführte Bezeichnung Seileck.

Würde im Krafteck (Fig. 219, rechts) der Pol O nach der linken Seite von EG symmetrisch verlegt, so erhielten S_1, S_2 und S_3 dieselben Grössen wie bisher, S_1 würde dann aber im Seileck von A aus nach rechts ansteigen mit dem Ansteigungswinkel α_1 gegen die Wagerechte. Das in solcher Weise zu den Lasten P und Q erhaltene Seileck würde eine Figur sein, in welcher die Knickpunkte C und D oberhalb AB liegen; S_1, S_2, S_3 würden wie in Fig. 213 (S. 174) Druckkräfte werden. Diese Figur ist als Gleichgewichtsform eines Seiles nicht möglich, gleichwohl hat man den Namen Seileck auch für solche Fälle beibehalten, während man eigentlich richtiger Gelenkvieleck sagen würde. Ein solches Gelenkvieleck aus mehr als zwei Gelenkstangen mit hochliegenden Zwischengelenken (nach oben gekehrten Knien), in welchen durch abwärts gerichtete Lasten Druckkräfte entstehen, ist nur in unsicherem Gleichgewichte, kann nur künstlich gehalten werden und geräth bei der geringsten Veränderung in beschleunigte Abwärtsbewegung; in Bezug auf die Ermittelung der Gleichgewichtsform und der entsprechenden Kräfte ist sonst kein Unterschied zwischen der unsicheren und der sicheren Gleichgewichtsform, ebensowenig wie zwischen Fig. 213 und 217.

Beispiel: Sechs Stangen mögen die Längen: $l_1 = 0{,}98^{\text{m}}$; $l_2 = 0{,}87^{\text{m}}$; $l_3 = 0{,}84^{\text{m}}$; $l_4 = 0{,}69^{\text{m}}$; $l_5 = 1{,}01^{\text{m}}$; $l_6 = 0{,}86^{\text{m}}$ haben; die Lasten seien $P_1 = 62^{\text{kg}}$; $P_2 = 54^{\text{kg}}$; $P_3 = 44^{\text{kg}}$; $P_4 = 60^{\text{kg}}$; $P_5 = 62^{\text{kg}}$. Die äussersten Seiten des Seilecks mögen je unter 45^0 gegen die Wagerechte geneigt sein. Trägt man die Lasten zu einem Streckenzuge zusammen (im Maſsstabe $1^{\text{mm}} = 10^{\text{kg}}$) (Fig. 220), so wird die Gesammtlast 282^{kg}, und weil die äussersten Strahlen davon je um 45^0 abweichen, so ist der Polabstand $H = \frac{1}{2}\,\Sigma P = 141^{\text{kg}}$ die wagerechte Kraft, die durch die ganze Verbindung hindurchgeht. Die Stäbe sind der Reihe nach parallell den Polstrahlen in den gegebenen Längen (im Maſsstab 1 : 100) aufzutragen. Die Längen der Polstrahlen geben die Grösse der Spannkräfte der parallelen Stäbe.

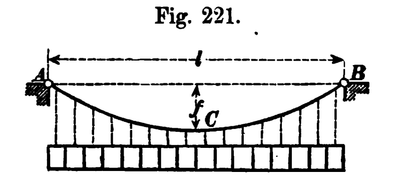
Fig. 220.

8. Kettenlinien.

Wird die Zahl der Gelenkstangen immer grösser, ihre Länge immer kleiner, so nähert sich die vieleckige Gleichgewichts-Figur immer mehr einer stetig gekrümmten Kurve. Immer aber bleiben dieselben Gesetze gültig: namentlich also fällt die Richtung der Spannkraft einer Stange mit der Richtung der Stange zusammen. Werden die einzelnen Stangen unendlich klein, so kommt man zu einer an jeder Stelle völlig biegsamen Kette oder einem biegsamen Faden mit stetiger Belastung. Die Spannkraft an irgend einer Stelle ist dann tangential gerichtet. Die Belastung der einzelnen Bogentheilchen der Kette kann überall gleich oder verschieden sein; danach wird die Gleichgewichtsform der Kette, die Kettenlinie, eine verschiedene.

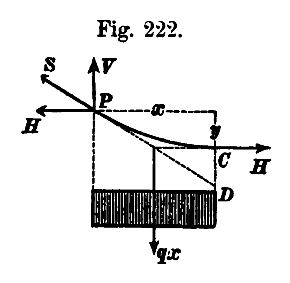
Wir betrachten zunächst den einfachen Fall, dass die Belastung sich gleichförmig über die wagerechte Projektion der Kette vertheile, dass also jede Längeneinheit (jedes Meter) dieser Projektion ein bestimmtes Gewicht q zu tragen habe. Dies können wir uns vorstellen durch einen prismatischen Belastungskörper mit dem Gewichte q für die Längeneinheit, der durch lothrechte Schnitte in unendlich viele Scheiben geschnitten ist, welche mittels gewichtloser Fäden oder Hängestangen an der selbst gewichtlosen Kette aufgehängt sind (Fig. 221).

Fig. 221.



Im tiefsten Punkte C ist die Kette und daher auch die Spannkraft H an dieser Stelle wagerecht gerichtet. Schneiden wir die Kette nochmals in einem wagerechten Abstande x von C, so ist hier, bei P (Fig 222) eine Spannkraft S anzubringen. Die Kräfte S und H müssen nun den zwischenliegenden Lasten das Gleichgewicht halten. Die Mittelkraft dieser Lasten ist qx mit dem Abstande $1/2\, x$ von P. Die Momentengleichung in Bezug auf P liefert dann: $0 = -Hy + 1/2\, q x^2$, also:

Fig. 222.



$$1) \qquad y = \frac{q x^2}{2 H} \quad \text{oder} \quad x^2 = 2\left(\frac{H}{q}\right) y.$$

Die Gleichgewichtsform der Kette ist also eine Parabel mit lothrechter Achse vom Parameter $H:q$.

Für $x = \frac{1}{2}\,l$ wird $y = f$, daher nach Gl. 1:

$$f = \frac{q\,l^2}{8\,H}; \tag{2}$$

durch Division beider Gleichungen entsteht dann:

$$\frac{y}{f} = \frac{4\,x^2}{l^2}. \tag{3}$$

Bemerkenswerth ist auch, dass der Schnitt der 3 Kräfte S, H und qx in der Mitte der Strecke x liegt, so dass wenn man die Richtung der Tangente S bis zur Lothrechten durch C verlängert, der hier entstehende Schnittpunkt D in der Tiefe y unter C, d. h. in der Tiefe $2\,y$ unter P liegt. Dies ist eine kennzeichnende Eigenschaft der Parabel.

Die wagerechte Seitenkraft oder Projektion von S ist $= H$, die lothrechte $V = q\,x$.

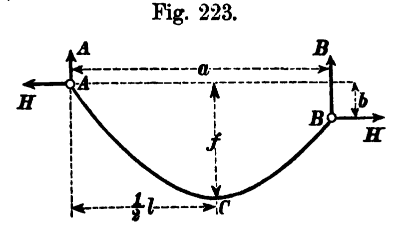
Zu einer gegebenen Last q sind unendlich viele parabolische Kettenlinien möglich, je nachdem H grösser oder kleiner gewählt wird. Es lässt sich diese bestimmende Grösse aber auf die Pfeilhöhe f der Parabel zurückführen; denn aus Gl. 2 folgt:

$$H = \frac{q\,l^2}{8\,f}. \tag{4}$$

Vergrösserung von H bedingt also Verkleinerung der Pfeilhöhe f, und umgekehrt. Der Parameter $\frac{H}{q}$ kann also auch $\frac{l^2}{8\,f}$ geschrieben werden.

Liegen die Befestigungspunkte A und B in einem wagerechten Abstande a, liegt aber B um b tiefer als A, so liegt der tiefste Punkt C nicht in der Mitte (Fig. 223). Seine wagerechte Entfernung $\frac{1}{2}\,l$ von A soll berechnet werden. Die Widerstände A und H bei A und die Spannkraft H bei C müssen den Lasten zwischen A und C das Gleichgewicht halten, d. h. $A = \frac{1}{2}\,q\,l$; $Hf = \frac{1}{8}\,q\,l^2$ also $H = \frac{q\,l^2}{8\,f}$. Entsprechendes gilt für das Stück rechts von C, wo statt $\frac{1}{2}\,l$ zu setzen ist $a - \frac{1}{2}\,l$, statt f aber $f - b$. Mithin $H = \frac{q}{8}\,\frac{(2\,a - l)^2}{f - b}$.

Fig. 223.



Die beiden Werthe H sind aber, wie bei jeder lothrecht belasteten Stangenverbindung, dieselben, mithin

$$\frac{(2a-l)^2}{l^2} = \frac{f-b}{f} = 1 - \frac{b}{f}$$

$$\text{oder} \quad \frac{b}{f} = 1 - \frac{(2a-l)^2}{l^2} = \frac{-4a^2+4al}{l^2}.$$

Weil aber $f = \frac{ql^2}{8H}$, so wird $\frac{b}{f} = \frac{8bH}{ql^2} = \frac{4al-4a^2}{l^2}$

$$\text{oder} \quad a(l-a) = \frac{2bH}{q}$$

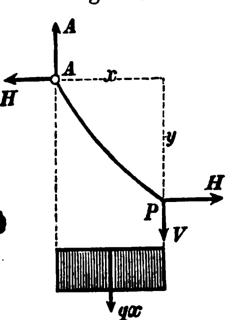
$$\text{und} \quad l = a + \frac{2b}{a}\frac{H}{q} \quad \text{oder} \quad \frac{l}{2} = \frac{a}{2} + \frac{b}{a}\frac{H}{q}.$$

Wichtig ist auch die Gleichung der parabolischen Kettenlinie, bezogen auf den Anfangspunkt A. Man kann dieselbe entwickeln, indem man von der Gl. 1 (S. 181) ausgeht, kann sie aber ebenso leicht unmittelbar ableiten: Im Punkte A (Fig. 221 und 224) wirken die Widerstände $A = \frac{1}{2}ql$ und $H = \frac{ql^2}{8f}$, und in Bezug auf den Punkt P gilt die Momentengleichung:

$$0 = \tfrac{1}{2}qlx - Hy - \tfrac{1}{2}qx^2, \quad \text{oder}$$

$$5) \qquad y = \frac{q}{2H}x(l-x) = \frac{4f}{l^2}x(l-x).$$

Fig. 224.



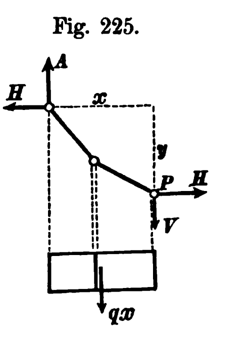
Dies ist also eine andere Form der Gleichung einer Parabel vom Parameter $\frac{H}{q} = \frac{l^2}{8f}$.

Auch künftig werden wir öfter auf eine Gleichung der Form $y = Cx(l-x)$ kommen; diese bedeutet stets eine Parabel, deren Achse parallel der y-Achse und welche die in der x-Richtung liegende Sehne l symmetrisch überspannt.

Ist der prismatische Lastkörper nicht an unendlich vielen Stellen, sondern nur an einzelnen Stellen zerschnitten und an diesen Stellen mit der Kette verbunden, so wird die Gleichgewichtsform wieder ein Vieleck, ein Seileck, und zwar ist dies Seileck ein der Parabel (Gl. 5) eingeschriebenes Vieleck. Durchschneidet man (Fig. 225) die Stangenverbindung im Gelenkpunkte P (der Koordinaten x und y), so müssen die hier auftretenden Spannkräfte H

und V nebst den in A auftretenden Widerständen $A = {}^1/_2\, q\, l$ und H wieder den zwischenliegenden Lasten $q x$ das Gleichgewicht halten. Es entsteht dann ganz dieselbe Momentengleichung wie auf S. 183, und für irgend einen Knotenpunkt P gilt die Gl. 5. Liegen nämlich die Befestigungspunkte A und B in gleicher Höhe und in dem Abstande l, so ergiebt sich leicht, dass $A = B = {}^1/_2\, q\, l$ sein muss, wie auch die Schnittstellen liegen mögen. Also:

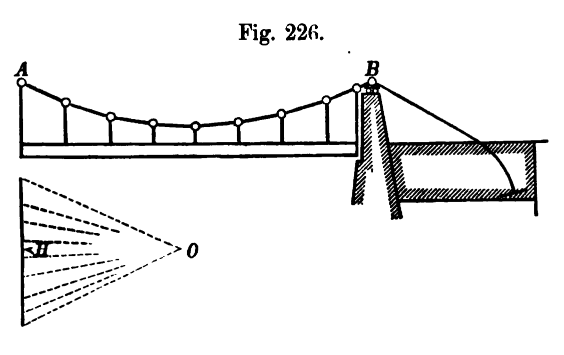
Fig. 225.



Ist eine Stangenverbindung derartig belastet, dass die Last sich gleichförmig über die wagerechte Projektion vertheilt, aber nur in einzelnen, den Theillinien der Last entsprechenden Gelenkpunkten auf die Stangenverbindung übertragen wird, so ist die Gleichgewichtsform ein Sehnenvieleck einer Parabel mit lothrechter Achse; die wagerechte Spannkraft beträgt $H = \frac{q\, l^2}{8 f}$, wenn l die Spannweite, f die Pfeilhöhe der Parabel.

Beispiel: Die Kette einer Hängebrücke habe 40^{m} Spannweite und 5^{m} Pfeilhöhe (Fig. 226). Ihre Belastung vertheile sich nahezu gleichmässig über die wagerechte Projektion und betrage $q = 1000^{\text{kg}}$ für das Meter Länge. Die Kettenglieder werden demnach einer Parabel eingeschrieben sein. Die wagerechte Spannkraft wird $H = \frac{q\, l^2}{8 f} = \frac{1000 \cdot 40 \cdot 40}{8 \cdot 5} = 40\,000^{\text{kg}}$. Die ganze Spannweite sei durch Hängestangen in 8 gleiche Fache von je 5^{m} Länge getheilt. Dann hat jede Stange das Gewicht zweier halben Fache $= 5000^{\text{kg}}$ auf die Kette zu übertragen. Da 7 mittlere Knotenpunkte vorhanden sind, so kann man das entsprechende

Fig. 226.



Krafteck zeichnen, indem man die 7 Lasten von je 5000^{kg} auf einer Lothrechten aufträgt ($5000^{\text{kg}} = 2^1/_2{}^{\text{mm}}$). Der Mitte der Lasten gegenüber

wählt man in einem Abstande $H = 40\,000$ kg = 20 mm den Pol O. Die Polstrahlen nach den Theilpunkten der Lastlinie geben dann Richtung und Grösse der Spannkräfte der einzelnen Stäbe. Ein Punkt P der Kette in einem Abstande $x = {}^1\!/\!_4\, l$ von der Mitte hat eine Höhe y über dem Scheitel C (nach Gl. 3): $y = f \cdot 4x^2 : l^2 = f \cdot {}^1\!/\!_4 = {}^5\!/\!_4$ m. Würde man die Aufhängepunkte A und B an den Pfeilern befestigen, so würden diese einen Druck $A = B = {}^1\!/\!_2\, q\, l$ nach unten, zugleich aber eine nach innen gerichtete wagerechte Kraft $H = 40\,000$ kg erfahren. Letzterer würde ein hoher Pfeiler nicht leicht widerstehen können, daher führt man die Kette jenseits des Pfeilers fort und verankert sie in tiefer liegendem Mauerwerke, so dass der Pfeiler im Wesentlichen nur lothrechten Druck erfährt. Die Breite der Pfeiler macht es unmöglich, die Endpunkte A und B als Aufhängepunkte der Last zu benutzen. Die hierdurch veranlasste Abweichung ist auf der rechten Seite, bei B, berücksichtigt (auch im Krafteck), während auf der linken, bei A, der ideelle Zustand beibehalten wurde.

Die nach aussen gerichtete Kraft H kann auf die beiden Punkte A und B auch durch eine steife gerade Verbindungsstange ausgeübt werden, welche diese Kraft H als Druckkraft auszuhalten hat (Fig. 227). Alsdann brauchen die Stützen nur noch lothrecht aufwärts gerichtete Widerstände A und B zu leisten. Die Fahrbahn, welche bei Hängebrücken unter der Kette sich befindet, kann nun auch in Höhe der Stange AB gelegt und durch Druckstangen auf die Gelenke der Kette gestützt werden. Das Sehnen-Vieleck der Parabel bleibt aber nur im Gleichgewichte, solange die Last gleichförmig vertheilt ist. Kommt eine fremde Last hinzu, so wird die Stangenverbindung eine Verrückung erfahren; es treten Schwankungen ein, die bei Kettenbrücken bekannt sind, und erst nach längerer Zeit kann sich ein neuer Gleichgewichtszustand bilden, wenn keine fernere Änderung der Last erfolgt. Diese Bewegungen kann man mehr oder weniger verhindern, indem man die einzelnen, in Fig. 228 befindlichen Trapeze durch Einfügung je einer Diagonale oder Strebe zu geometrisch bestimmten Figuren umwandelt. Auf diese Weise entsteht ein parabolischer Fachwerkträger. Dreht man die Figur um eine wagerechte Achse, bis das parabolische Vieleck oberhalb der Sehne AB liegt, so hat man einen entsprechenden Träger. Die Stäbe des Vielecks erfahren dann Druck, die Sehne AB aber Zug. (S. A. Ritter, Techn. Mechanik, 2. Aufl., S. 244.) — Theilung und Aufhängung der Last nach Fig. 221 bedingt (nach Fig. 222) ein der Parabel umschriebenes Seileck.

Fig. 227.

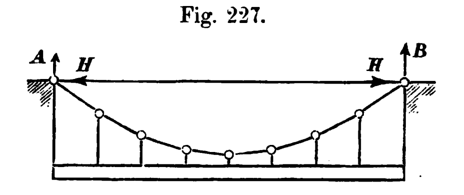
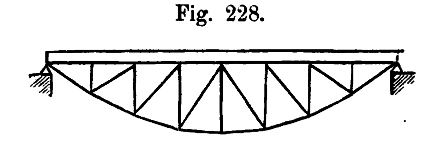
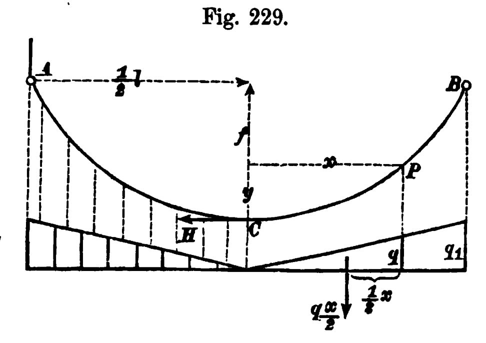


Fig. 228.



Kettenlinie für gleichförmig veränderte Belastung. Besteht der Belastungskörper aus zwei symmetrischen Keilen (Fig. 229), so ist die Belastung q der Längeneinheit veränderlich, nämlich

Fig. 229.



$$q = q_1 \frac{x}{^1/_2\, l},$$

wenn q_1 die Einheitsbelastung an den äusseren Enden ist. Zwischen C und P befindet sich dann eine Gesammtlast $^1/_2\, q\, x$ mit dem Hebelarm $^1/_3\, x$ in Bezug auf P. Daraus folgt die Momentengleichung

$$0 = Hy - \frac{q\,x}{2} \cdot \frac{x}{3}$$

6) $$y = \frac{q\,x^2}{6\,H} = \frac{q_1\,x^3}{3\,H l}.$$

Wird wiederum $y = f$ für $x = {}^1/_2\, l$, so ergiebt sich auch leicht

7) $$y : f = 8\,x^3 : l^3.$$

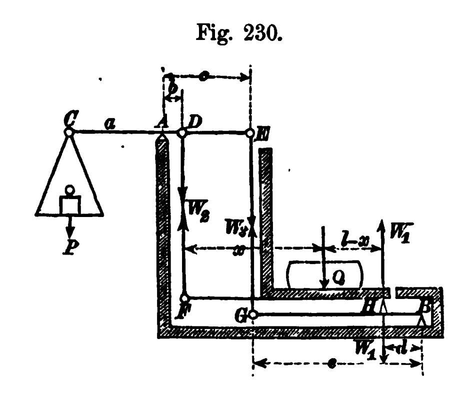
Die Kettenlinie bildet also von C bis B einen Zweig einer kubischen Parabel; CA ist dazu symmetrisch.

9. Brücken- und Tafelwaagen.

Bei den auf S. 152 behandelten Hebelwaagen wurde die Belastung einer Waagschale mittels Hängeketten auf einen bestimmten Punkt des Waagebalkens übertragen. Die dem Aufbringen der Last unter Umständen hinderlichen Ketten lassen sich entbehren, man kann für die Last eine freie Brücke oder Tafel schaffen und durch Anwendung geeigneter Stangenverbindungen erreichen, dass die Last an jede beliebige Stelle der Brücke oder Tafel gelegt werden darf, ohne das Ergebnis der Wägung zu beeinflussen.

Brückenwaage des Strassburger Mechanikers Quintenz (1821). (Fig. 230.) Das Ganze hat 2 feste Drehpunkte A und B. Die Stange EG, welche in der Figur den Brückenbalken FH schneidet, geht in Wirklichkeit ungehindert daran vorbei, weil FH im Grundrisse aus 2 Theilen besteht. Die Last Q wird mittels des Brückenbalkens FH von zwei Kräften W_1 und W_2 im Gleichgewichte gehalten, u. zw. ist $W_1 = Qx : l$; $W_2 = Q - Qx : l$, wenn l die Länge des Balkens ist. W_2 wird mittels der Zugstange FD auf den oberen Hebel CAE übertragen. W_1 drückt auf den untersten Hebel BG nach unten und wird durch die bei G angreifende Spannkraft $W_3 = W_1 \frac{d}{e} = \frac{Qx}{l} \frac{d}{e}$ im Gleichgewichte gehalten. Der oberste Hebel trägt bei C die Schale mit dem Gewichtsstücke P, welches den Spannkräften W_2 und W_3 das Gleichgewicht halten muss. Also

Fig. 230.



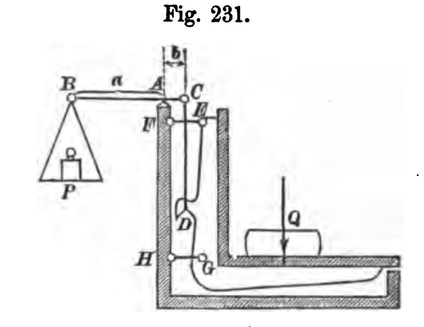
$$Pa = W_2 b + W_3 c = \left(Q - Q\frac{x}{l}\right) b + \frac{Qx}{l} \frac{d}{e} c,$$

oder
$$Pa = Qb - Q\frac{x}{l}\left(b - \frac{d}{e} c\right).$$

Damit nun die Lage der Last auf der Brücke gleichgültig sei, muss in der letzten Gleichung das mit x behaftete Glied verschwinden, es muss $b = \frac{d}{e} c$ oder $b : c = d : e$ sein; d. h. die rechte Seite ADE des obersten Hebels muss mit dem untersten Hebel BG in gleichem Verhältnisse getheilt sein. Dann ist $Pa = Qb$, d. h. die Anwendung der Stangen und Hebel bewirkt, dass es für den obersten Hebel so ist, als ob die Last Q unmittelbar bei D hinge. Macht man dann noch $a = 10\,b$, so hat man eine sog. Decimalwaage.

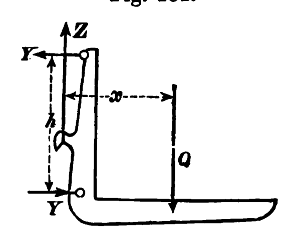
Brückenwaage von George (Paris), 1840. Die Brücke (Fig. 231) wird von einem ⌊-förmigen Rahmen getragen. Dieser hängt im Punkte D mittels einer Hängestange DC an dem oberen Hebel CAB. Damit die durch Q belastete Brücke wegen ihrer seitlichen Unterstützung nicht umkippe, wird sie durch zwei parallele Stäbe EF und GH so geführt, dass sie stets parallel ihrer ursprünglichen Lage bleibt.

Fig. 231.



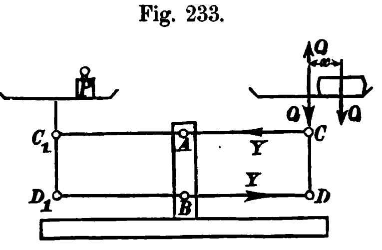
An der Brücke halten sich im Gleichgewichte (Fig. 232) das Gewicht Q, die Kraft Z der Hängestange und die Kräfte Y und Y der Führungsstangen. Daher muss $Yh = Qx$ sein und, was die Hauptsache, $Z = Q$, d. h. die Zugstange CD überträgt auf den obersten Hebel einfach die Last Q. Eine Verschiebung der Last beeinflusst nur die Kraft in den Führungsstangen; es wird also wieder $Pa = Qb$.

Fig. 232.



Tafelwaage. Auf demselben Grundgedanken beruhen die Tafelwaagen, welche einfach auf jeden Tisch gestellt werden können und bei denen die Schalen oben frei liegen (Fig. 233). Auch hier kann die Last an jede Stelle der Schale gelegt werden. In der Linie CD fügt man zwei gleiche entgegengesetzte Kräfte Q hinzu, dann wirkt die abwärts gerichtete dieser beiden niederdrückend auf die parallelen Hebel CAC_1 und DBD_1, während das ausserdem wirkende Moment Qx von den in der Längenrichtung dieser Hebel auftretenden, von den festen Drehpunkten A und B aufzunehmenden Kräften Y aufgehoben wird. Die Waage wirkt also wie eine gleicharmige Balkenwaage. Wagerechter Stand bedingt Gleichheit zwischen Last Q und Gewichtstück P.

Fig. 233.

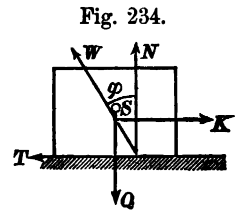


10. Reibung.

a) Reibungsziffer, Reibungswinkel und Reibungskegel.

Bisher haben wir die Körper als vollkommen glatt angenommen, wobei sie in Folge einfacher Berührung nur Normalkräfte auf einander ausüben konnten. Wäre dies wirklich der Fall, so würde ein Körper auf wagerechter Ebene, einmal in Bewegung gesetzt, seine Bewegung stets mit derselben Geschwindigkeit fortsetzen. Die Erfahrung lehrt aber, dass dies nicht zutrifft, dass vielmehr eine gewisse Zugkraft K erforderlich ist, um den Körper in gleichförmiger Bewegung zu erhalten. Daraus folgt das Vorhandensein eines Tangential- oder Reibungswiderstandes $T = K$ (Fig. 234). Die Reibung ist eine Folge der Rauhheit der Oberflächen der Körper. Ihre Grösse ist in erster Linie von der Grösse des Normaldruckes N abhängig, und man nennt das Verhältnis $T : N = f$ (frictio) die Reibungsziffer oder den Reibungs-Koëfficienten.

Fig. 234.



Ergiebt sich, dass zum gleichmässigen Fortziehen eines 62 kg schweren Schlittens auf einer wagerechten Eisfläche eine wagerechte Zugkraft $K = 2$ kg erforderlich ist, so beträgt die Reibungsziffer $f = \frac{T}{N} = \frac{K}{Q} = \frac{2}{62} = \frac{1}{31}$.

Die Reibungsziffer zweier Körper hängt wesentlich von der Beschaffenheit der Berührungsflächen ab, also von der Natur der Körper, von der Art der Bearbeitung und der etwaigen Schmierung.

Daneben hat auch die Geschwindigkeit der Gleitbewegung einen Einfluss auf die Reibung. Beim Übergange aus der Ruhe in die Bewegung ist die Reibung am grössten und nimmt mit wachsender Geschwindigkeit ab. Auch von der Grösse des auf die Flächeneinheit kommenden Druckes hängt die Reibungsziffer ab. Bei sehr kleinem Einheitsdruck, also verhältnismässig grosser Berührungsfläche ist die Reibungsziffer gross, mit zunehmendem Einheitsdrucke nimmt sie anfänglich ab, dann aber wieder zu, wie durch Versuche erkannt wurde.

Diese Abhängigkeit von der Geschwindigkeit und der Grösse des Einheitsdruckes ist aber nur erst für einige Sonderfälle näher festgestellt. Im Allgemeinen müssen wir daher f als nur abhängig von der Beschaffenheit der Berührungsflächen behandeln, und voraussetzen, dass die entsprechende Zahl durch

Versuche, deren Umstände dem zu behandelnden Falle möglichst ähnlich sind, ermittelt wurde.

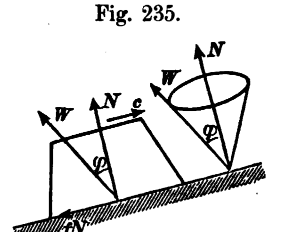
Gleitet ein Körper auf fester Fläche, so besteht die Einwirkung der letzteren auf den Körper in dem Normalwiderstande N und dem Tangentialwiderstande $T = fN$. Die Mittelkraft W beider heisst der Gesammtwiderstand der festen Fläche und schliesst mit der Normalen N einen Winkel φ ein, für den

$$\operatorname{tg}\varphi = T : N = fN : N = f, \text{ d. h.}$$
$$\operatorname{tg}\varphi = f.$$

Wegen der festen Beziehung zwischen φ und f nennt man φ den Reibungswinkel.

Der Reibungswiderstand ist stets der Bewegungsrichtung entgegengesetzt. Da nun die Gleitbewegung alle möglichen Richtungen in der Berührungsebene haben kann, so gilt von fN das Gleiche. Setzt man jede dieser Kräfte fN mit N zusammen (Fig. 235), so bekommt man unendlich viele mögliche Richtungen von W, welche eine Kegelfläche mit der Achse N bilden, den sog. Reibungskegel.

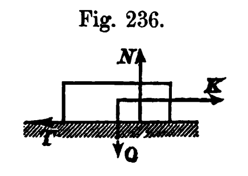
Fig. 235.



Der Reibungskegel ist eine Kegelfläche, deren Spitze im Angriffspunkte von N, deren Achse in der Richtungslinie von N liegt und deren Seiten mit der Achse den Reibungswinkel φ einschliessen. Gleitet ein Körper auf einer festen Fläche, so leistet diese einen Gesammtwiderstand W, der in der Mantelfläche des Reibungskegels liegt.

Die von der Rauhigkeit der Körper herrührende Reibung ist nun aber eine Widerstandskraft, welche die relative Gleitbewegung an der Fläche wohl hindern oder verzögern, niemals aber eine solche hervorbringen oder beschleunigen kann. Liegt z. B. (Fig. 236) ein Körper vom Gewichte $Q = 100^{\text{kg}}$ auf wagerechter Ebene und ist $f = 0{,}3$, so ist zum gleichmässigen Fortziehen des Körpers (etwa mittels eines wagerecht gespannten Seiles) eine Kraft $K = 30^{\text{kg}}$ erforderlich. Diese Kräfte werden auch an dem Körper noch im Gleichgewichte sein, wenn die Geschwindigkeit desselben zu Null wird.

Fig. 236.



Zieht man aber an dem ruhenden Körper mit einer Kraft $K < 30^{kg}$, vielleicht nur mit einer Kraft von 10^{kg}, so wird nicht etwa der Reibungswiderstand T das Übergewicht über $K = 10^{kg}$ gewinnen und den Körper beschleunigt nach links bewegen, denn der Reibungswiderstand einer Fläche kann eine Gleitbewegung an derselben nicht erzeugen, vielmehr wird nun die Widerstandskraft T nur $= K = 10^{kg}$ werden. Und lässt man K zu Null werden, so wird auch $T = 0$.

Ist also ein Körper auf einer festen Fläche in Ruhe, so hat der Reibungswiderstand T im Allgemeinen nicht den Werth fN, sondern er ist dann $\leqq fN$, er tritt nur in derjenigen Grösse auf, die erforderlich ist, um den Ruhezustand zu erhalten. Dann ist aber auch der Winkel β zwischen W und $N \leqq \varphi$, und die Richtungslinie von W liegt nicht in der Mantelfläche, sondern im Allgemeinen im Innern des Reibungskegels.

Fig. 237.

Soll ein Körper sich auf einer festen Ebene gleichmässig und geradlinig verschieben, wobei der Gesammtwiderstand W in der Mantelfläche des Reibungskegels liegt, so müssen die ausser W noch vorhandenen Kräfte eine Mittelkraft R liefern, welche mit der Kraft W im Gleichgewicht ist, also ebenfalls in der Mantelfläche des Reibungskegels liegt (Fig. 237).

Fig. 237.

Soll der Körper aber auf der festen Fläche in relativer Ruhe verbleiben, wobei W im Allgemeinen im Innern des Reibungskegels liegt (Fig. 238), so muss auch R eine solche Richtung und Lage haben. Liegt beim ruhenden Körper R auf der Mantelfläche des Reibungskegels, so genügen die Kräfte sowohl der Bedingung für die Ruhe als auch derjenigen für die Bewegung. Es befindet sich dann der Körper im Grenzzustande der Ruhe. Wird er in richtiger Weise (etwa durch einen Stoss) in Bewegung gesetzt, so verbleibt er auch in dieser.

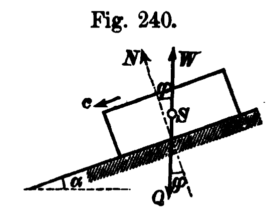
Fig. 239.

Der Gesammtwiderstand W kann nur innerhalb des Bereiches der Unterstützungsfläche (s. S. 166) angreifen. Durch diese Unterstützungsfläche muss daher auch R hindurchgehen; andernfalls würde der Körper umkippen (Fig. 239)

b) Schiefe Ebene.

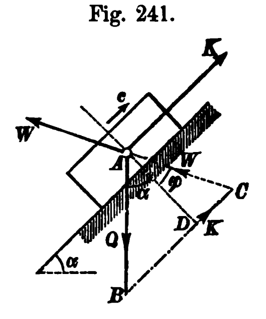
Ist die Unterstützungsebene des Körpers unter dem Winkel α gegen die Wagerechte geneigt und hat man diesen Winkel so geregelt, dass der Körper unter alleiniger Wirkung der Schwere eine gleichmässige, geradlinige Abwärtsverschiebung ausführt, wobei der Gesammtwiderstand W in der Richtung aufwärts von N um den vollen Reibungswinkel φ abweicht, so muss die einzige bewegende Kraft, die Schwere Q des Körpers, das Entgegengesetze von W sein (Fig. 240). Da aber die Lothrechte mit der Rechtwinkligen zur schiefen Ebene den Winkel α bildet, so muss $\alpha = \varphi$ sein. Hierin liegt das einfachste Mittel zur Bestimmung des Reibungswinkels φ durch Versuche: Hebt man die schiefe Ebene allmählich höher an, bis der darauf liegende Körper, durch kleine Stösse in Bewegung gebracht, die Bewegung gleichförmig fortsetzt, so ist der entsprechende Neigungswinkel α gleich dem Reibungswinkel φ für die beiden Stoffe, aus denen Körper und Bahn bestehen.

Fig. 240.



Es möge nun auf den Körper vom Gewichte Q noch eine, parallel zur schiefen Ebene, aufwärts gerichtete Zugkraft K wirken (Fig. 241). K möge sich mit der Richtungslinie von Q im Punkte A schneiden. Soll der Körper gleichförmig aufwärts gezogen werden, so übt die Ebene auf ihn einen Widerstand W aus, der von der (punktirten) Normalen zur Ebene um den vollen Reibungswinkel φ nach unten abweicht. Diese drei Kräfte Q, K und W müssen sich nun im Gleichgewichte halten, d. h. sie müssen sich in dem Punkte A schneiden und ausserdem ein geschlossenes Krafteck bilden. Man trage also AB als Q auf, verlängere W nach unten, ziehe durch B eine Parallele zu K, d. h. zur Ebene, so ist ABC das Krafteck und BC die Grösse K. Ohne Reibung wäre $W = N = DA$, mithin zeigt BD denjenigen Betrag, den K auf reibungsloser Ebene haben müsste ($= Q \sin \alpha$), während DC wegen der Reibung hinzukommt. Da nun der Winkel $BAC = \alpha + \varphi$, $\measuredangle BCA$ aber $= 90^0 - \varphi$,

Fig. 241.



so wird nach dem Sinus-Satze $K : Q = \sin(\alpha + \varphi) : \sin(90^0 - \varphi)$, oder:

1) $$K : Q = \sin(\alpha + \varphi) : \cos\varphi,$$

oder auch, bequemer für die Rechnung:

2) $$K : Q = \sin\alpha + f\cos\alpha,$$

wenn man $\sin\varphi : \cos\varphi = \operatorname{tg}\varphi$ mit f vertauscht.

Soll aber der Körper nicht hinauf gezogen, sondern durch die aufwärts gerichtete Kraft, die nun K_1 genannt werden möge, etwa an einem Seile, gleichmässig hinabgelassen werden, so kehrt sich, wegen der entgegengesetzten Bewegung, die Reibung um, und der Widerstand W rückt in die zum ersten Falle symmetrische Lage, indem er von der Normalen nach oben hin abweicht. Die erforderliche Kraft K_1 wird nun durch das erheblich kleinere Stück BC_1 dargestellt.

Fig. 242.

$$\measuredangle BAC_1 = \alpha - \varphi;\ \measuredangle BC_1A = 90^0 + \varphi,$$

mithin

3) $$K_1 : Q = \sin(\alpha - \varphi) : \sin(90^0 + \varphi)$$

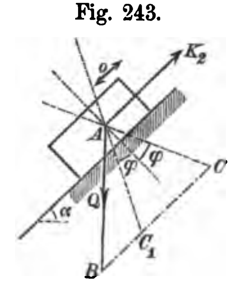
$$= \sin(\alpha - \varphi) : \cos\varphi$$

4) $$= \sin\alpha - f\cos\alpha.$$

(Für $\varphi > \alpha$ müsste K_1 abwärts gerichtet sein.)

Soll die Kraft K aber den Körper weder hinaufziehen, noch hinunterlassen, soll sie vielmehr den in Ruhe befindlichen Körper in Ruhe erhalten, so hat man zur Bestimmung ihrer Grösse K_2 zu beachten, dass im Ruhezustande der Widerstand W irgend eine Richtung innerhalb des Reibungskegels, also hier innerhalb des doppelten Reibungswinkels einnehmen kann (Fig. 243), dass daher der Endpunkt der Kraft K_2 im Krafteck irgendwo zwischen C_1 und C liegen muss, so dass

Fig. 243.



$$K_2 \geqq K_1 \text{ und zugleich } K_2 \leqq K$$

sein muss, innerhalb dieser Grenzen aber völlig willkürlich gewählt werden kann.

Man kann diese Ergebnisse zusammenfassen in die einzige Gleichung:

5) $$K = Q\,(\sin \alpha \mp f \cos \alpha).$$

Darin bezeichnet das obere Vorzeichen die grössere, zum Hinaufziehen erforderliche Zugkraft, welche neben der Seitenkraft der Schwere ($Q \sin \alpha$) noch die Reibung ($fQ \cos \alpha$) überwinden muss; das untere Vorzeichen die kleinere, zum Hinablassen erforderliche Kraft. Der Einfluss der entgegengesetzten Bewegung macht sich in der Formel durch Umkehrung der Vorzeichen von φ oder f geltend, wie auch in allen späteren Fällen sich zeigen wird. Diese beiden Werthe K und K_1 bilden dann zugleich die Grenzen für die zum Festhalten erforderliche Kraft K_2. Wäre nämlich $K_2 < K_1$, so würde der Körper beschleunigt abwärts gleiten, wäre $K_2 > K$, so würde der Körper eine Beschleunigung nach oben erfahren. Soll weder das Eine, noch das Andere erfolgen, so muss K_2 zwischen K_1 und K bleiben, ist im übrigen aber beliebig. Das Ergebnis, dass die für den Ruhezustand erforderliche Kraft zwischen den beiden, für die abwärts, bezw. aufwärts gerichtete Bewegung erforderlichen Kräften bleiben muss, gilt auch für alle anderen im Nachstehenden behandelten Fälle dieser Art.

Beispiel: Eine Holzkiste von 100 kg Gewicht soll auf einer unter 45° geneigten Ebene mittels eines, parallel mit der Ebene gespannten Seiles aufwärts gezogen werden. Die Reibungsziffer betrage unter der Annahme einer hölzernen Bahn $f = 0{,}3$, entsprechend einem Reibungswinkel $\varphi = 17^\circ$. Für $\alpha = 45^\circ$ ist $\sin \alpha = \cos \alpha = \sqrt{1/2} = 0{,}707$. Mithin (Gl. 5)

$$K = 100 \cdot 0{,}707\,(1 \pm 0{,}3) = 70{,}7 \pm 21{,}2 = 91{,}9\,\text{kg bezw. } 49{,}5\,\text{kg}.$$

Darin ist 70,7 der zur Überwindung der schräg abwärts gerichteten Seitenkraft der Schwere erforderliche Theil, 21,2 der Reibungswiderstand. Zum Hinaufziehen muss an dem Seile mit 91,9 kg gezogen werden, zum Hinablassen sind nur 49,5 kg erforderlich. Ist die Kiste in Ruhe und soll sie auch mittels des Seiles in Ruhe gehalten werden, so muss man an dem Seile mit einer Kraft K_2 ziehen, welche zwischen 49,5 und 91,9 kg liegt. Übt man nun die kleinste zulässige Kraft von 49,5 kg aus, so muss die Reibung mit ihrem vollen Betrage von 21,2 kg dem Arbeiter zu Hülfe kommen, um die Seitenkraft der Schwere von 70,7 kg aufzuheben. Es erfordert diese Verwendung der kleinsten Kraft aber ein gewisses Mafs von Aufmerksamkeit; denn lässt die ausgeübte Kraft nur im geringsten nach, so erfolgt eine beschleunigte Abwärtsbewegung, die dann nur mit grösserer Anstrengung wieder aufzuheben ist. Übt man an dem Seile, der Sicherheit wegen, eine grössere Kraft aus als 49,5 kg, so ändert sich dadurch in dem sichtbaren Ruhezustande nichts; die Reibung tritt dann nur mit entsprechend geringerem Betrage auf. Hat die Spannkraft den Werth

70,7 kg, so kommt gar keine Reibung zur Wirkung, denn diese tritt im Ruhezustande stets nur in derjenigen Grösse auf, die nöthig ist, um das Gleiten zu verhindern. In diesem Falle würde auch bei völlig glatten Körpern kein Gleiten eintreten. Wächst die Spannkraft über 70,7 kg hinaus, so würde bei glatten Körpern schon ein beschleunigtes Gleiten nach oben eintreten; in Wirklichkeit wird der Überschuss einstweilen noch durch Reibung vernichtet, die nun aber sich nach unten richtet und der Schwere zu Hülfe kommt. Bei 91,9 kg Kraft nimmt diese Reibung den grössten möglichen Werth an. Würde der Körper nun durch einen kleinen Anstoss nach oben in Bewegung gesetzt, so würde er diese Bewegung auch fortsetzen. Erschütterungen können den Eingriff der Unebenheiten der Körper zeitweise aufheben oder vermindern und deshalb auch die Reibung theilweise aufheben.

Ist die Zugkraft K nicht parallel der Ebene, sondern weicht sie von der Normalen zur Ebene um einen Winkel β ab, so verfährt man im Übrigen wie oben. K und Q mögen sich in A schneiden. Von A aus trage man $Q = AB$ auf, zeichne W wie in Fig. 241, ziehe $BC \parallel K$, so ist $BC = K$ für die Aufwärtsbewegung. Und zwar ist

Fig. 244.

6) $K : Q = \sin(\alpha + \varphi) : \sin(\beta - \varphi)$.

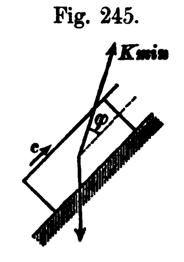
Für gleichförmige Abwärtsbewegung ist wiederum nur $+\varphi$ mit $-\varphi$ und umgekehrt zu vertauschen, also

7) $$K_1 : Q = \sin(\alpha - \varphi) : \sin(\beta + \varphi).$$

Für Ruhezustand ist erforderlich, dass K_2 zwischen K_1 und K verbleibe.

Denkt man sich die Richtung der Zugkraft K, etwa des Zugseiles, veränderlich, so ändert sich auch die Grösse von K. In dem Dreieck ABC (Fig. 244) wird $K = BC$ offenbar am kleinsten, wenn BC rechtwinklig zu AC ist, wenn also $\measuredangle ACB = \beta - \varphi = 90^0$, oder $\beta = 90^0 + \varphi$; es weicht dann die Kraft K von der Parallelen zur Ebene um den Reibungswinkel nach oben hin ab, und ist (Fig. 245) $K_{min} = Q \sin(\alpha + \varphi)$. Dagegen wird $K = BC$ (Fig. 244) immer grösser, wenn der Winkel ACB abnimmt; ist endlich $BC \parallel W$, d. h. $\beta = \varphi$, so wird $K = \infty$. Für diese Richtung einer zunächst endlich gedachten Kraft K fällt nämlich die Mittelkraft R aus K und Q in das Innere des Reibungskegels, wobei eine gleichförmige Gleitbewegung nicht möglich ist. Nur für

Fig. 245.



$K = \infty$ würde Q gegen K verschwinden und R mit K und W zusammenfallen.

Fig. 246.

Ist K wagerecht, so wird $\beta = 90^0 - \alpha$. Dieser einfache Fall ist aber ebenso leicht unmittelbar zu entwickeln wie aus Gl. 6. Es ist (Fig. 246)

$$K : Q = \operatorname{tg}(\alpha + \varphi).$$

Schreibt man

$$8) \qquad K = Q \operatorname{tg}(\alpha \pm \varphi),$$

so hat man in dem kleineren Werthe wieder K_1 zum Hinablassen, und in K und K_1 die Grenzen für den Ruhezustand.

Halbkugel auf schiefer Ebene. Eine Kugel kann unter alleiniger Einwirkung der Schwere auf schiefer Ebene nicht in Ruhe sein, wohl aber eine Halbkugel (Fig. 247). Der Gesammtwiderstand des Berührungspunktes A muss das Gewicht Q aufheben. Der Normalwiderstand N geht stets durch den Mittelpunkt O. Es muss stattfinden $N = Q \cos \alpha$, die Reibung $T = Q \sin \alpha$, und in Bezug auf O:

$$0 = + Tr - Q \cdot \overline{SO} \sin \vartheta,$$

mithin, weil nach S. 136 $\overline{SO} = {}^3/_8\, r$:

$$\sin \vartheta = {}^8/_3 \sin \alpha.$$

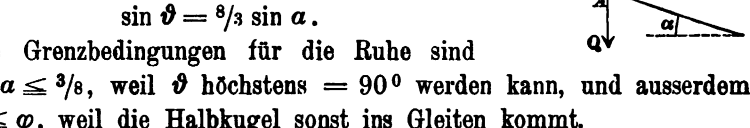


Fig. 247.

Die Grenzbedingungen für die Ruhe sind $\sin \alpha \leqq {}^3/_8$, weil ϑ höchstens $= 90^0$ werden kann, und ausserdem $\alpha \leqq \varphi$, weil die Halbkugel sonst ins Gleiten kommt.

c) Bewegung in Keilnuthen.

Liegt ein Körper, statt auf wagerechter Ebene, in einer wagerechten keilförmigen Rinne oder Keilnuth mit dem Keilwinkel $2\,\delta$ (Figur 248), so müssen in der Querschnittsebene die Gegendrücke N der Seitenflächen dem Gewichte Q das Gleichgewicht halten. Es wird

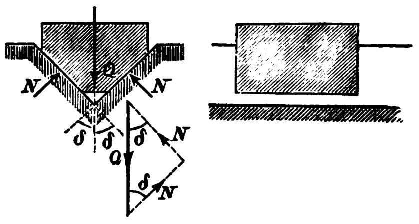


Fig. 248.

$$Q = 2\,N \sin \delta \quad \text{oder} \quad 2\,N = Q : \sin \delta.$$

Der Bewegung setzt sich an jeder Seitenfläche ein Reibungswiderstand fN entgegen, so dass die erforderliche Zugkraft wird

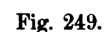
$$9)\qquad K = 2fN = \frac{Qf}{\sin\delta}.$$

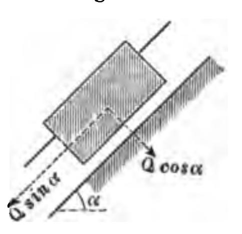
Das keilartige Einpressen des Körpers in die Nuth hat im Vergleiche mit der Bewegung auf ebener Fläche denselben Einfluss, als wäre die Rauhigkeit verstärkt, die Reibungsziffer f auf $f : \sin\delta$ vergrössert (A. Ritter, Technische Mechanik). Dasselbe Ergebnis findet man auch in anderen Fällen, wenn man aus dem Falle der Bewegung eines Körpers auf einer ebenen oder krummen Fläche zu denjenigen übergeht, wo in die Fläche keilförmige Rinnen eingearbeitet sind, in die der Körper keilartig eingreift. Man hat dann stets f zu vertauschen mit $f : \sin\delta$, oder auch den Reibungswinkel φ mit einem grösseren Werthe ψ, für den

$$10)\qquad \operatorname{tg}\psi = \frac{f}{\sin\delta} \text{ ist.}$$

Giebt man z. B. der Rinne eine Neigung α gegen die Wagerechte (Fig. 249), so ergiebt sich $Q\cos\alpha$ als diejenige Seitenkraft von Q, welche der Körper an die Keilnuth eindrückt. In vorstehender Figur 248 ist dann Q mit $Q\cos\alpha$ zu vertauschen; daher wird

$$2N = Q\cos\alpha : \sin\delta$$


Fig. 249.



und der gesammte Reibungswiderstand

$$2fN = Q\cos\alpha \cdot f : \sin\delta.$$

Setzt man diesen Werth $= Q\sin\alpha$, so erhält man die Bedingung für gleichförmige Abwärtsbewegung durch die Schwere, nämlich $\operatorname{tg}\alpha = \frac{f}{\sin\delta} = \operatorname{tg}\psi$, oder $\alpha = \psi$.

Es ist hierzu nicht erforderlich, dass eine wirkliche Keilnuth vorhanden sei; gleiche Wirkungen treten auch auf, wenn sich der Körper etwa zwischen 2 runde Bäume einkeilt, wenn also die von den bewegenden Kräften herrührende Seitenkraft (in der Richtung rechtwinklig zur Bewegung) von 2 Kräften N aufgehoben wird, die mit ihr in einer Ebene liegen, aber nicht parallel sind.

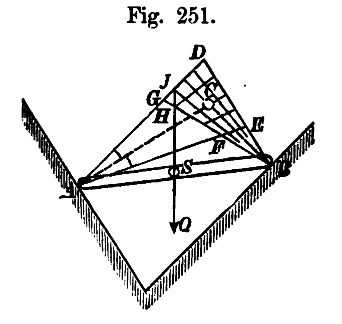
Soll ein runder Körper zwischen den Bäumen einer sog. **Streichleiter** gleiten (Fig. 250) und ist $\delta = 45^0$ der Winkel der Tangente bei A mit der Mittelebene, so wird $f : \sin \delta = 1{,}414\, f$ als Reibungsziffer einzuführen sein, also wenn, wie in dem Beispiele auf S. 194, $f = 0{,}3$ ist, statt dessen $0{,}42$. Bei $\alpha = 45^0$ wird dann $K = 100{,}4$, $K_1 = 41^{kg}$.

Fig. 250.

d) Stabförmiger Körper, von zwei Ebenen gestützt.

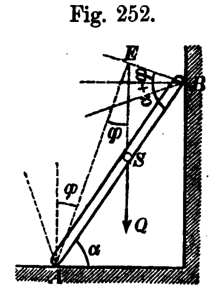
Der Körper mit dem Schwerpunkte S möge die Ebenen in den Punkten A und B berühren (Fig. 251), u. zw. sollen A, B und S in einer lothrechten Ebene liegen, zu welcher die beiden Stützebenen rechtwinklig sind. Wären die Körper völlig glatt, so könnten in A und B nur Normaldrücke N und N_1 entstehen, durch deren Schnittpunkt C die Schwerlinie des Stabes gehen müsste, wenn Gleichgewicht bestehen sollte. Bei vorhandener Rauhigkeit aber hat man in A und B die Reibungskegel zu zeichnen; die Mittelschnitte derselben haben ein Viereck $DEFG$ gemeinsam, und dies Reibungsviereck ist der Bereich aller möglichen Schnittpunkte der Widerstände W und W_1 der Stützpunkte A und B. Da nun für Gleichgewicht die Kraft Q mit W und W_1 einen gemeinsamen Schnittpunkt haben muss, so erfordert der Ruhezustand, dass die Schwerlinie des Stabes durch das Viereck hindurchgehen muss. Schneidet die Schwerlinie das Viereck aber vielleicht in HJ, so sind längs dieser Strecke HJ unendlich viele Schnittpunkte von W, W_1 und Q möglich, daher sind auch W und W_1 nach Richtung und Grösse unbestimmt. Nur wenn Q durch einen der Grenzpunkte E und G des Vierecks geht, ist die Richtung (und dann auch die Grösse) von W und W_1 bestimmt. In diesen Fällen befindet sich der Stab im Grenzzustande der Ruhe; W und W_1 liegen auf den Mantelflächen der Reibungskegel, es treten von A und B die vollen Reibungswerthe auf, und bei dem geringsten Anstosse geräth der Stab ins Gleiten.

Fig. 251.



Ruhezustand einer Leiter. Eine Leiter AB von der Länge l stütze sich bei A gegen den Boden, lehne sich bei B gegen eine lothrechte Wand (Fig. 252). Die Reibungsziffern für beide Ebenen seien die gleichen. Der Schwerpunkt S der (etwa belasteten) Leiter liege um $AS = nl$ von A entfernt. Gesucht wird der Neigungswinkel α, unter dem die Leiter an der Grenze des Ruhezustandes ist.

Fig. 252.



Wird die Leiter in gewöhnlicher Weise durch Besteigung belastet, so kann die Schwerlinie nur zwischen A und B hindurchgehen; es interessirt dann von dem Vierecke der Schnittpunkte nur der rechtsseitige Endpunkt E, bis zu dem die Schwerlinie nach rechts sich bewegen darf, wenn noch Ruhe möglich sein soll. Dreieck AEB ist bei E rechtwinklig, ferner ist $\sphericalangle ASE = 90^0 + \alpha$, $\sphericalangle EBA = \alpha + \varphi$. Daher ist in ΔAES:

$$AS : AE = \sin\varphi : \sin(90^0 + \alpha) = \sin\varphi : \cos\alpha;$$

im Dreieck ABE:

$$AB : AE = 1 : \sin(\alpha + \varphi),$$

und aus beiden Gleichungen:

$$AS : AB = nl : l = n = \frac{\sin\varphi \cdot \sin(\alpha + \varphi)}{\cos\alpha}$$

$$\text{oder} \quad n\cos\alpha = \sin\varphi(\sin\alpha\cos\varphi + \cos\alpha\sin\varphi).$$

Theilt man auf beiden Seiten durch $\cos\alpha \cdot \cos^2\varphi$ und vertauscht $\operatorname{tg}\varphi$ mit f, $\cos^2\varphi$ aber mit $1 : (1 + \operatorname{tg}^2\varphi) = 1 : (1 + f^2)$, so ergiebt sich:

$$n(1 + f^2) = f(\operatorname{tg}\alpha + f), \text{ oder, nach } \operatorname{tg}\alpha \text{ aufgelöst:}$$

$$1) \qquad \operatorname{tg}\alpha = n\left(\frac{1}{f} + f\right) - f.$$

Ist also n gegeben, d. h. bekannt, wie weit das Gesammtgewicht der Leiter sich von dem unteren Endpunkte entfernen kann, so steht damit der Winkel α fest, welcher dem Grenzzustande der Ruhe entspricht.

Soll bei gegebener Schwerpunktslage Sicherheit gegen Gleiten vorhanden sein, so muss die wirkliche Schwerlinie links von E

bleiben, oder es muss das nach dem Punkte E berechnete n der Gleichung 1 grösser sein als das wirkliche n_1; d. h. das wirkliche

$n_1 < \frac{f(\operatorname{tg} \alpha + f)}{1 + f^2}$, mithin

2) $$\operatorname{tg} \alpha > n_1 \left(\frac{1}{f} + f\right) - f.$$

Man kann vorstehende Aufgabe, die wir hier geometrisch gelöst haben, auch rechnerisch auf Grund der drei Gleichgewichts-Bedingungen behandeln. Im Grenzzustande treten an den Berührungsstellen zu den Normaldrücken N und N_1 die vollen Reibungen fN und fN_1 hinzu, und zwar entgegengesetzt der Richtung des möglichen Ausgleitens, d. h. nach rechts, bezw. nach oben (Fig. 253). Die Gleichung der wagerechten Kräfte heisst:

Fig. 253.

3) $$fN = N_1;$$

die Gleichung der lothrechten Kräfte:

4) $$N + fN_1 = Q;$$

die Momentengleichung in Bezug auf A:

5) $$0 = Qnl \cos \alpha - N_1 l \sin \alpha - fN_1 l \cos \alpha.$$

Letztere Gleichung giebt:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{Qn - fN_1}{N_1}.$$

Aus den Gleichungen 3 und 4 ergiebt sich aber:

$$N_1 = \frac{Q}{\frac{1}{f} + f},$$

mithin wird wiederum:

$$\operatorname{tg} \alpha = n\left(\frac{1}{f} + f\right) - f.$$

Beispiel: Die Reibungsziffer betrage $f = 0{,}4 = \operatorname{tg} 22^\circ$. Ist zunächst die Leiter durch ihr eigenes, in der Mitte angreifendes Gewicht belastet, d. h. $n = 1/2$, so wird

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2}(2{,}5 + 0{,}4) - 0{,}4 = 1{,}05; \quad \alpha = 46\,{}^1\!/_2{}^\circ.$$

Bis zu diesem Werthe dürfte α abnehmen, ohne dass die Leiter ausglitte. Wird sie sodann bestiegen und hat der Besteigende dasselbe Gewicht wie die

Leiter, so ist, wenn der Besteigende noch auf dor untersten Sprosse steht, annähernd $n = {}^1/_4$, und

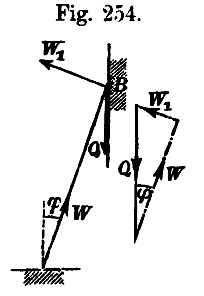
$$\operatorname{tg} \alpha = {}^1/_4 (2{,}8 + 0{,}4) - 0{,}4 = 0{,}325; \quad \alpha = 18^0.$$

Diese geringe Neigung darf aber nicht gewählt werden, wenn die Leiter höher hinauf bestiegen werden soll. Ist sie nämlich bis zur Mitte erstiegen, so ist wieder $n = {}^1/_2$. Wird sie aber bis oben bestiegen, so ist zuletzt $n = {}^3/_4$ und

$$\operatorname{tg} \alpha = {}^3/_4 (2{,}8 + 0{,}4) - 0{,}4 = 1{,}78; \quad \alpha = 60^0 40'.$$

Es genügt also nicht, den Sicherheitszustand der unbelasteten Leiter zu prüfen, wenn man sie bis oben ersteigen will; vielmehr erfordert der letztere Fall eine steilere Stellung der Leiter. Ist diese steile Lage aus irgend welchen Gründen nicht gut ausführbar, so lässt sich auch bei kleinerem Winkel α die Sicherheit erhöhen, wenn ein zweiter Arbeiter seine Füsse entweder vor die Leiter setzt, oder sich auf die unterste Sprosse stellt. Letzteres hat einen besseren Erfolg als das Davorstellen, wenn f für die Leiter vielleicht grösser ist als für die Sohlen des Arbeiters.

Fig. 254.



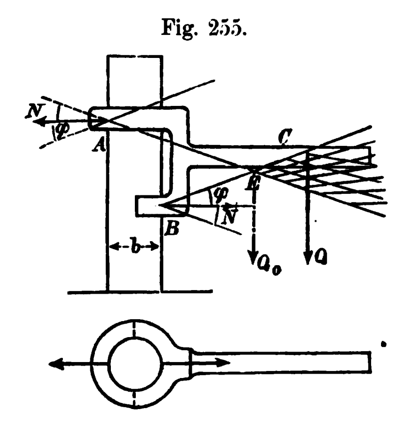
Ist die Leiter sehr leicht, so wird, wenn ein Mensch sie bis oben erstiegen hat, annähernd $n = 1$, mithin

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{f} + f - f = \frac{1}{f}, \text{ d. h, } \alpha = 90^0 - \varphi;$$

d. h. in diesem Falle, darf die Leiter höchstens um den Reibungswinkel von der Lothrechten abweichen (Fig. 254). Für $\varphi = 22^0$ wäre $\alpha = 68$ '. Die Gesammtwiderstände W und W_1 schneiden sich mit Q in B, es wird $W = Q \cos \varphi$; $W_1 = Q \sin \varphi$.

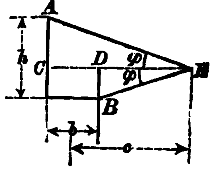
Reibungs-Hülsen und Reibungs-Ringe zur Aufhängung von Lasten. Soll an einer Säule ohne Vorsprünge eine Last nur durch Reibung sicher aufgehängt werden, so schiebe man (Fig. 255) über die Säule eine Hülse, welche erstere bei A und B berührt, bei A also einen geschlossenen Ring bildet, während bei B nur ein Ringsegment erforderlich ist. Zuerst stützt man die Hülse gegen Hinabgleiten, etwa bei A, übt dann an dem seitlichen Arme C einen Druck nach unten aus und bewirkt dadurch ein Drehungsbestreben rechts herum, welchem sich bei A und B gleiche und entgegengesetzte Drücke N der Säule entgegenstellen. Mit Einschluss

Fig. 255.



der Reibung bilden sich nun in A und B Gesammtwiderstände W und W_1 innerhalb der Reibungskegel der Punkte A und B. Die Mittelschnitte der Reibungskegel treffen sich zunächst im Punkte E; rechts von E aber liegt der Bereich der möglichen Schnittpunkte von W und W_1. Geht daher das Gesammtgewicht Q der Hülse einschliesslich des belasteten Armes durch E, so befindet sich die Hülse im Grenzzustande der Ruhe, weil die Drücke N dann noch so gering sind, dass nur die volle Reibung fN an beiden Stellen hinreicht, um das Abwärtsgleiten zu verhindern. Geht aber das Gesammtgewicht Q rechts von E vorbei, so ist das Gleichgewicht der Hülse, gesichert, und zwar um so mehr, je weite rechts Q liegt. Ist b die Breite der Säule h der Höhenabstand der Punkte A und B, c die gesuchte Entfernung des Punktes E von der Mitte der Säule (Fig. 256), so findet man leicht

Fig. 256.



$$h = AC + DB = \left(c + \frac{b}{2}\right)\operatorname{tg}\varphi + \left(c - \frac{b}{2}\right)\operatorname{tg}\varphi$$

$$h = 2c \operatorname{tg}\varphi \quad \text{oder} \quad c = \frac{h}{2f}.$$

Ist x der Abstand der Gesammtlast Q von der Säulenmitte, so ist die Bedingung für Ruhe:

$$6) \qquad x \geqq c \ \text{d. h.}\ x \geqq \frac{h}{2f}.$$

Die Grösse der Last Q ist ganz ohne Einfluss auf die Sicherheit des Gleichgewichts. Wenn also Säule und Hülse nur stark genug sind, so dass sie annähernd als starre Körper gelten können, so kann man an dem Seitenarme jede beliebig grosse Last aufhängen, weil mit zunehmender Last auch N und die mögliche Reibung fN zunehmen.

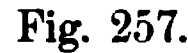
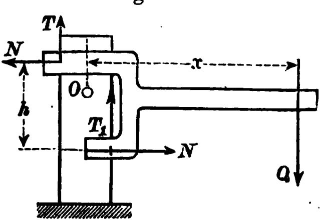


Fig. 257.



Nennen wir die bei A und B zur Wirkung kommenden Reibungswiderstände T und T_1, so ist $T + T_1 = Q$. Wie sich Q auf T und T_1 vertheilt, ist unbestimmt. Machen wir die willkürliche Annahme: $T = T_1 = \frac{1}{2} Q$, so können auch N und N_1 berechnet werden. In Bezug auf O (Fig. 257) ist dann, weil die Momente

von T und T_1 sich aufheben, $Nh = Qx$. Die Summe der grössten möglichen Reibungswiderstände wäre

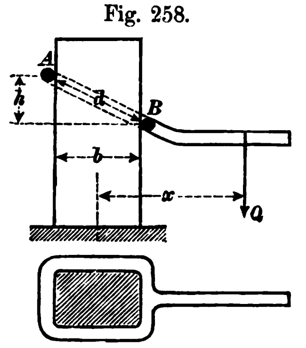
$$2 f N = 2 f Q \frac{x}{h} \text{ oder, weil } h = 2 f c \text{ war,}$$

$$2 f N = Q x : c;$$

weil nun von der Reibung nur der Theil Q beansprucht wird, so ist die gesammte mögliche Reibung $x : c$ mal so gross wie die nöthige; $x : c$ kann also als der Sicherheitsgrad bezeichnet werden.

Die Reibungshülse kann durch den einfachen **Reibungsring** (Fig. 258) (mit der gleichen Wirkung) ersetzt werden. Der etwa aus Rundeisen geschmiedete Ring hat eine Weite d, welche grösser ist als die Breite der Säule, so dass der Ring erst in schräger Lage die Säule bei A und B berührt. Die Reibungskegel bei A und B haben dann die gleiche Bedeutung wie in Fig. 255.

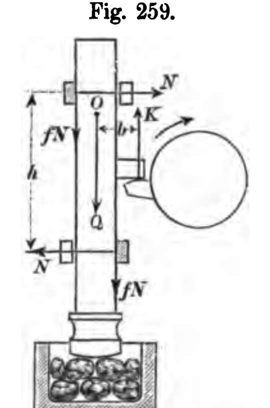
Fig. 258.



Beispiel: Es sei $b = 0{,}2$ m die Breite der Säule, $d = 0{,}21$ m die Weite des Ringes; dann wird $h = \sqrt{d^2 - b^2} = 0{,}064$ m. Ist nun für Holz und Schmiedeeisen (ohne Schmierung) $f = 0{,}5$, so wird $c = 0{,}064 : (2 \cdot 0{,}5) = 0{,}064$ m. Macht man nun $x = 0{,}2$ m, so ist die Sicherheit gegen Gleiten eine $0{,}2 : 0{,}064$ = 3fache (rund). Ist also die Gesammtlast $Q = 100$ kg, so ist die gesammte mögliche Reibung 300 kg, von der aber nur 100 kg zur Wirkung kommen. Oder man kann die Sicherheit auch so auffassen, dass die Reibungsziffer 0,5 auf 1/3 ihres Werthes sich vermindern darf, bevor Gleiten eintritt. Für $f = 1/6$ würde nämlich $c = 0{,}064 \cdot 3 = 0{,}192$, d. h. fast $= x$.

Gleichförmige Hebung eines Pochstempels. Ein zum Zerkleinern von Erzen oder dgl. dienender Stempel vom Gewichte Q (Fig. 259) wird durch den Daumen einer sich drehenden Daumenwelle erfasst und mittels einer Kraft K gehoben, bis er, nachdem der Daumen an dem Hubarme vorbeigekommen ist, frei herabfällt und die davon getroffenen Körper zerstampft. Da K und Q einen wagerechten Abstand b haben, so würde der Stempel umfallen, wenn er nicht durch Führungen in lothrechter

Fig. 259.



Lage gehalten würde. Von den Führungshölzern werden beim Heben nur die schraffirten wirksam und liefern gleiche Normaldrücke N, denen beim Aufwärtsgleiten abwärts gerichtete Reibungen fN entsprechen. Es ist nach der Gleichung der lothrechten Kräfte

1) $$K = Q + 2fN.$$

Die Momentengleichung in Bezug auf einen Punkt O der Mitte des Stempels lautet:

2) $$Nh = Kb.$$

Setzt man den hieraus erhaltenen Werth von N in Gl. 1 ein, so wird

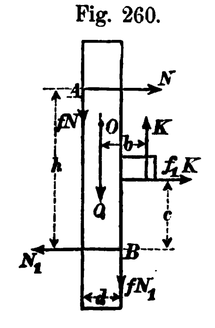
$$K = Q + 2f\frac{Kb}{h}, \text{ mithin}$$

3) $$K = \frac{Q}{1 - 2f \cdot \frac{b}{h}}.$$

Soll K klein werden, so muss $fb : h$ klein ausfallen; durch Glättung und Schmierung der Reibungsflächen muss hiernach f klein gemacht werden; der Arm b muss so kurz sein, wie die Rücksichten der Ausführung und des Betriebes gestatten, und der Abstand h der Führung muss möglichst gross sein.

Beispiel: Ist $Q = 150$ kg, $f = 1/8$, $b : h = 1 : 8$, so wird $K = 155$ kg. In der vorstehenden Ableitung ist angenommen, dass der Daumen auf den Arm b nur eine lothrechte Kraft ausübe; bei der Drehung der Welle gleitet aber der Daumen unter dem Arme nach rechts fort und wirkt durch Reibung nach rechts ziehend auf den Arm, so dass zu der Kraft K noch die nach rechts wirkende Reibung $f_1 K$ hinzukommt. Dies ändert die sonstigen Kräfte, z. B. wird nun der Druck N an beiden Führungen nicht mehr der gleiche sein können (Fig. 260). Es wird

Fig. 260.



1) $$f_1 K = N_1 - N;$$

2) $$K = Q + f(N + N_1),$$

und in Bezug auf B:

3) $$0 = -Q\frac{d}{2} + Nh - fNd - K\left(b - \frac{d}{2}\right) + f_1 Kc.$$

Aus Gl. 1 und 2 wird $N = \frac{K(1 - ff_1) - Q}{2f}$ und sodann aus Gl. 3:

$$K = \frac{Q}{1 - ff_1 + \frac{d}{h}f^2 f_1 - 2\frac{b}{h}f + \frac{2c}{h}ff_1}$$

oder

$$K = \frac{Q}{1 - 2\frac{b}{h}f - ff_1\left(1 - \frac{d}{h}f - \frac{2c}{h}\right)}.$$

$Q = 150$; $f = f_1 = {}^1/_8$; $b : h = {}^1/_8$; $d : h = {}^1/_{10}$; $c : h = {}^1/_2$ giebt dann $K = 155$ kg. Der Unterschied gegenüber obiger Vernachlässigung von f_1 ist verschwindend klein.

f) Festklemmen eines Stabes zwischen zwei Flächen.

Sind die beiden Ebenen, zwischen denen eine Stange sich befindet, nicht fest, sondern gehören sie zwei Körpern an, die durch seitliche Kräfte einander genähert werden können (Fig. 261), so ist das Verhalten der Stange gegenüber dem Versuche, die stützenden Körper zusammenzuschieben, ein verschiedenes, je nachdem

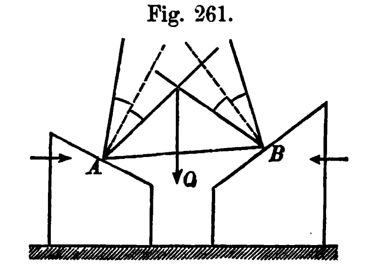


Fig. 261.

1. die Stange nicht in die beiden Reibungskegel der Punkte A und B fällt, oder aber

2. dieser Bedingung genügt.

Im ersten Falle können die Gesammtdrücke W und W_1 in A und B niemals in dieselbe Gerade (nämlich AB) fallen, können also auch niemals sich allein gegenseitig aufheben, sondern es können W und W_1 nur einer dritten Kraft, etwa dem Gewichte Q der Stange das Gleichgewicht halten. Ist nun die Stange sehr leicht, so dass man annähernd $Q = 0$ annehmen darf, so werden auch W und W_1 zu Null, d. h. die Stange übt auf die seitlichen Körper keine nennenswerthen Drücke aus. Versucht man, die Körper zusammenzuschieben, so kann die Stange dies nicht hindern, sondern sie weicht nach oben aus, indem sie sich entweder an beiden Stellen A und B oder nur an einer derselben längs der Ebene in die Höhe schiebt. An der Gleitstelle tritt dann der volle Reibungswiderstand auf, so dass dort W oder W_1 die tiefste mögliche Lage einnimmt, falls Q nicht ganz gleich Null angenommen wird.

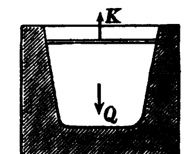
Fig. 262.

Liegt aber die Gerade AB innerhalb beider Reibungskegel (Fig. 262), so können W und W_1 auch beide in die Gerade AB fallen und sich dann allein, ohne Hinzutreten einer dritten Kraft, gegenseitig aufheben. Sie können nun in jeder beliebigen Grösse

auftreten, wenn die Stange zwischen den Ebenen ruht. Versucht man wieder, die Seitenkörper zusammenzuschieben, so wird die Stange dies vollständig verhindern. Je stärker man auf die Seitenkörper drückt, desto grösser werden auch die Widerstände $W = W_1$. Soll die Stange aber, um Raum zu geben, bei A und B nach oben ausweichen, so kommen die tiefsten Richtungen von W und W_1 zur Geltung, und um unter deren Einwirkung eine Bewegung der Stange nach oben zu ermöglichen, muss eine den Kräften W und W_1 das Gleichgewicht haltende, d. h. nach oben gerichtete Kraft K aufgewendet werden, und zwar ist die erforderliche Grösse dieser Kraft K abhängig von der Grösse der Pressung, die man vorher durch Zusammenschieben der Seitenkörper hervorgebracht hatte. Die Befreiung der Stange erfordert daher unter Umständen ein kräftiges Herausreissen nach oben hin. Der Zustand, in dem sich die Stange in solchem Falle befand, nennt man ein Festklemmen zwischen den Seitenkörpern. Es ist ein solches Festklemmen möglich, wenn AB innerhalb der beiden Reibungskegel liegt.

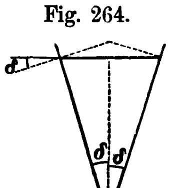
Bei völlig starren Körpern kann man sich ein solches Festklemmen nur vorstellen, wenn die Stange zuerst zwischen den Körpern gehalten wird und diese dann zusammengedrückt werden. Bei elastisch festen Körpern aber kann man die Stange auch durch einen abwärts gerichteten Druck in einen keil- oder kegelförmigen Hohlraum, dessen Seitenwände einen einzigen Körper bilden, hineintreiben (Fig. 263), kann dabei an den Berührungsstellen mehr oder weniger starke Pressungen erzeugen, die dann einer Lösung der Stange einen entsprechenden Reibungswiderstand entgegensetzen. Unter Umständen kann man dann den etwa gefässartigen Körper mittels der Stange emporheben.

Fig. 263.



Halbirt man die Winkel 2 δ zwischen beiden Seitenebenen durch eine Ebene und stellt die Stange zu dieser rechtwinklig (Fig. 264), so bildet sie mit Normalen zu der Ebene die Winkel δ. Soll sie nun innerhalb der Reibungskegel liegen, so muss $\delta \leq \varphi$ sein, d. h. der Winkel zwischen den Seitenebenen muss $\leq 2\varphi$ sein, wenn ein Festklemmen möglich sein soll.

Fig. 264.



g) Keil in dem Spalt eines Baumstammes oder dergl.

Ein zur Mittelebene symmetrischer Keil vom Keilwinkel 2δ (Fig. 265) soll durch eine Kraft K gleichmässig in dem Spalte weitergeschoben werden. Zu den Normaldrücken N kommen die in die Keilflächen fallenden, nach oben gerichteten Reibungswiderstände fN hinzu. N schliesst den Winkel δ mit der Querrichtung des Keiles, fN denselben Winkel mit der Kraft K ein. Für Gleichgewicht wird daher (Fig. 265a)

Fig. 265.

Fig. 265a.

Fig. 265b.

$$K = 2N\sin\delta + 2fN\cos\delta$$

$$1) \qquad = 2N(\sin\delta + f\cos\delta).$$

Oder auch $\quad K = 2W\sin(\delta + \varphi)$

mit $\quad W = N : \cos\varphi$.

Für die rückgängige Bewegung des Keiles gilt (ebenfalls mit dem Sinne der Kraft nach unten, Fig. 265b)

$$2) \qquad K_1 = 2N(\sin\delta - f\cos\delta).$$

Die Kraft K_2 aber, welche für den Ruhezustand des Keiles erforderlich ist, muss zwischen den Werthen K_1 und K bleiben.

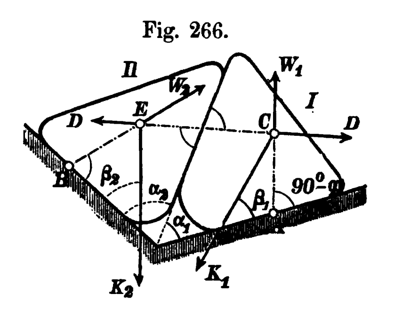
Ist $\delta > \varphi$, d. h. $\operatorname{tg}\delta > f$ oder $\sin\delta > f\cos\delta$, so ist $K_1 > 0$. In diesem Falle muss auch bei der Aufwärtsbewegung noch eine abwärts gerichtete Kraft K_1 wirken, damit die Bewegung nicht beschleunigt, sondern gleichförmig erfolge. Die Drücke N würden trotz der Reibung noch im Stande sein, den Keil beschleunigt aus dem Spalt hinauszutreiben; oder der zu stumpfe Keil wird, sobald die treibende Kraft aufhört, zurückspringen. Für $\delta < \varphi$ aber wird $K_1 < 0$, d. h. in diesem Falle ist ein Herausziehen des Keiles durch eine aufwärts gerichtete Kraft $(-K_1)$ nöthig. Der Keil wird durch die Reibung im Spalte festgehalten; je grösser die Seitendrücke N werden, um so fester steckt er; es findet hier also ähnliches statt wie beim Festklemmen einer Stange, und zwar erfolgt dies Klemmen ebenfalls, wenn der Keilwinkel $2\delta < 2\varphi$. Auch hier können in solchem Falle die Gesammtdrücke W und W_1 der beiden Seitenflächen in dieselbe Linie fallen und sich allein gegenseitig aufheben.

Bei der gewöhnlichen Anwendung des Keiles zum Spalten ist die Wirkung der Triebkraft eine unterbrochene. Wäre nun $\delta > \varphi$, so würde der Keil in den Pausen zwischen zwei Schlägen zurückspringen. Daher muss $\delta < \varphi$ gemacht werden, der Keil muss sich gegen Zurückspringen festklemmen. Ein solcher Keil heisst selbstsperrend.

h) Gleichförmige Bewegung zweier sich berührenden Keile.

Zwei Keile mit den Keilwinkeln α_1 und α_2 (Fig. 266) berühren einander und ausserdem zwei Seitenebenen. Auf die Keile wirken die Kräfte K_1 und K_2, welche mit den festen Ebenen die Winkel β_1 und β_2 bilden. Es soll deren Verhältnis ermittelt werden, unter der Annahme, dass Keil I der vorrückende, II der zurückgetriebene sei.

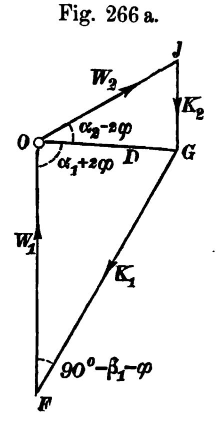
Fig. 266.



Die rechtsseitige Ebene übt einen Gesammtdruck W_1 aus, der von der Normalen zur Ebene um den Reibungswinkel φ nach rechts abweichen muss, wenn Keil I nach links vorrückt. Der Angriffspunkt von W_1 ist unbestimmt, werde daher in A willkürlich angenommen. W_1 bildet mit dem oberen Theile der rechtsseitigen Unterstützungsebene, an der er abwärts gleitet, den spitzen Winkel $90^0 - \varphi$ (mit dem unteren Theile den stumpfen Winkel $90^0 + \varphi$). Durch den Punkt C, in welchem W_1 die Kraft K_1 schneidet, muss nun auch der gegenseitige Druck D zwischen beiden Keilen hindurchgehen, weil drei sich im Gleichgewichte haltende Kräfte einen gemeinsamen Schnittpunkt haben müssen. D muss die Berührungsebene beider Keile wieder so schneiden, dass der spitze Winkel $90^0 - \varphi$ im Keile I auf der oberen Seite erscheint. (Die Winkel $90^0 - \varphi$ sind in der Figur durch kleine Kreisbögen hervorgehoben.) Der gegenseitige Druck D schneidet K_2 im Punkte E, durch welchen auch W_2 hindurchgehen muss. Bei B aber, wo W_2 die linksseitige feste Ebene trifft, muss der spitze Winkel $90^0 - \varphi$ an der unteren Seite erscheinen, da der Keil II nach oben gleitet. Hiermit stehen die Richtungen der Drücke an den Keilflächen fest; die Lagen ebenfalls, nachdem der Punkt A willkürlich angenommen

war. Trägt man nun die Kraft K_1 nach einem beliebigen Mafsstabe als GF im Krafteck (Fig. 266a) auf, setzt daran die Richtungen von W_1 und D, so schneiden sich beide in O und schliessen das Kräftedreieck GFO, welches der Gleichgewichtszustand fordert. Zieht man $OJ \parallel W_2$, $GJ \parallel K_2$, so stehen nun auch die Kraftgrössen W_2 und K_2 fest. Der Linienzug $ACEB$, dessen Seiten die Richtungslinien der Drücke an den drei Keilflächen darstellen, heisst die Drucklinie der beiden Keile. Betrachtet man O als den Pol des Kraftecks, so sind die Seiten der Drucklinie den Polstrahlen OF, OG, OJ der Reihe nach parallel. Die Drucklinie bildet daher ein zu den Kräften K_1 und K_2 gezeichnetes Seileck. Die Lage des Poles O und die Grösse der Kraft K_2 sind aber an die Bedingung gebunden, dass die Seiten des Seilecks, d. h. der Drucklinie, die Keilflächen in ganz bestimmter Weise unter den Winkeln $90^0 - \varphi$ schneiden müssen. Will man nun die Kräfte aus dem Krafteck auch berechnen, so muss man die Winkel des Kraftecks bestimmen.

Fig. 266 a.



Der spitze Winkel zwischen K_1 und W_1 würde $90^0 - \beta_1$ betragen, wenn W_1 ein Normaldruck wäre. Durch die Abweichung um φ wird jener Winkel noch um dieses Mafs kleiner, d. h. es wird $\sphericalangle OFG = 90^0 - \beta_1 - \varphi = 90^0 - (\beta_1 + \varphi)$. D und W_1 würden, wenn beide Normaldrücke wären, denselben Winkel α_1 mit einander bilden wie die entsprechenden Keilflächen; durch die Abweichung einer jeden um φ vergrössert sich dieser Winkel um 2φ; daher ist $\sphericalangle FOG = \alpha_1 + 2\varphi$. Entsprechend findet man $\sphericalangle OJG = 90^0 - (\beta_2 - \varphi)$, $\sphericalangle JOG = \alpha_2 - 2\varphi$. Sonach ergiebt sich

$$K_1 : D = \sin(\alpha_1 + 2\varphi) : \cos(\beta_1 + \varphi);$$
$$K_2 : D = \sin(\alpha_2 - 2\varphi) : \cos(\beta_2 - \varphi).$$

Durch Theilung beider Gleichungen entsteht dann

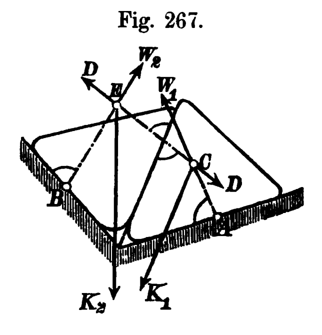
$$1)\qquad \frac{K_1}{K_2} = \frac{\sin(\alpha_1 + 2\varphi)\cos(\beta_2 - \varphi)}{\sin(\alpha_2 - 2\varphi)\cos(\beta_1 + \varphi)}.$$

Für $\alpha_2 = 2\varphi$ würde $\sphericalangle JOG = 0$ und $K_2 = 0$ oder $K_1 : K_2 = \infty$, in der Drucklinie würde BE mit CE zusammenfallen, d. h. der

Keil II würde zwischen Keil I und der linksseitigen Ebene sich festklemmen. Die vorausgesetzte Bewegung würde ferner unmöglich werden für $\beta_1 = 90^0 - \varphi$, weil dann $\measuredangle\, OFG = 0$ werden würde. In diesem Falle würde K_1 schon durch W_1 allein aufgehoben und es entstände gar kein Druck D gegen den zweiten Keil, also auch keine Möglichkeit, die Kraft K_2 an dem Keile II zu überwinden.

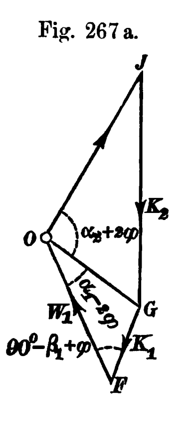
Soll die Bewegung der Keile umgekehrt erfolgen (Fig. 267), soll Keil II vorrücken und Keil I zurückweichen, so findet man, an einem Punkte A am Keile I beginnend, in gleicher Weise die Drucklinie; ihre einzelnen Seiten verdrehen sich aber, gegenüber der Fig. 266, je um $2\,\varphi$. Die spitzen Winkel $90^0 - \varphi$ liegen jetzt durchweg an der anderen Seite als in Fig. 266. Im Krafteck (Fig. 267a) wird, wenn K_1 zu derselben Grösse angenommen wird wie vorher, K_2 nun viel grösser als vorher. Das Verhälinis $K_1 : K_2$ erhält man leicht, wenn man in Gl. 1 durchweg die Vorzeichen von φ umkehrt.

Fig. 267.



Sind endlich beide Keile in Ruhe, so liegt die Richtung des Widerstandes W_1 irgendwo innerhalb des doppelten Reibungswinkels, und dasselbe gilt für die Richtungen der Drücke D und W_2. Bei gegebenem K_1 hat nun der Pol O des Kraftecks keine bestimmte Lage mehr, weil W_1 und D innerhalb des doppelten Reibungswinkel jede Richtung haben können; ebenso wird die Richtung von W_2 unbestimmt und damit auch die Grösse K_2. Das Verhältnis $K_1 : K_2$ ist jetzt nur durch die beiden Grenzen bestimmt, welche sich aus den beiden untersuchten Bewegungsfällen ergeben haben und welche man auch leicht rechnerisch findet, indem man Gl. 1 das eine Mal mit dem angegebenen Vorzeichen von φ, das andere Mal mit den entgegengesetzten dieser Zeichen ausrechnet.

Fig. 267 a.



Man erkennt hieraus, dass es für die beiden ruhenden Keile im Allgemeinen unendlich viele mögliche Drucklinien giebt. Jede derselben ist ein zu den Kräften K_2 und K_1 gezeichnetes Seileck,

zu dessen Konstruktion der Pol O und der Anfangspunkt A der Drucklinie innerhalb gewisser Grenzen beliebig gewählt werden können. Da aber die Seiten der Drucklinie die Richtung und Lage der Drücke an Keilflächen darstellen, so müssen sie zwei einschränkenden Bedingungen genügen:

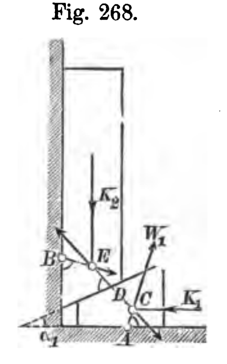
1. darf eine Seite der Drucklinie höchstens um den Reibungswinkel von der Normalen zu der entsprechenden Keilfläche abweichen;

2. muss eine Seite der Drucklinie die zugehörige Keilfläche innerhalb des Bereiches der Berührung (vgl. S. 166) schneiden.

Der Ruhezustand der beiden Keile unter Einwirkung gegebener Kräfte K_1 und K_2 ist nur möglich, wenn wenigstens e i n e, diesen Bedingungen entsprechende, Drucklinie nachweisbar ist.

Beispiel: Ein mit K_2 belasteter Pfosten (Fig. 268) soll mittels des untergeschobenen Keiles, an dem eine wagerechte Kraft K_1 wirkt, gleichmässig in die Höhe gekeilt werden. Die Drucklinie $ACEB$ ergiebt sich leicht unter Annahme eines willkürlichen Punktes A. (Die spitzen Winkel $90^0 - \varphi$ sind wieder durch kleine Bögen ohne Ziffern bezeichnet.) Der Druck D würde, wenn er ein Normaldruck wäre, mit der Lothrechten den Winkel α_1 bilden; wegen der Reibung wird dieser Winkel $OGJ = \alpha_1 + \varphi$. Das Verhältnis $K_1 : K_2$ liesse sich leicht aus Gl. 1 berechnen, indem man dort die Sonderwerthe dieses Falles einsetzte. Wir ziehen aber eine unmittelbare Berechnung vor. Man erkennt leicht, dass W_1 und W_2 von den zu einander rechtwinkligen Gleitebenen nach derselben Seite um $90^0 - \varphi$ abweichen, also ebenfalls zu einander winkelrecht sein müssen. Das Viereck $GFOJ$ ist darnach bei G und bei O rechtwinklig, ist also ein einem Kreise vom Durchmesser FJ eingeschriebenes.

Fig. 268.



Der Winkel $FOG = \alpha_1 + 2\varphi$ steht über dem Bogen $\widehat{FG}$; demselben Bogen entspricht aber auch der Umfangswinkel FJG, der daher dieselbe Grösse $\alpha_1 + 2\varphi$ hat. Daher ist

$$K_1 : K_2 = \operatorname{tg}(\alpha_1 + 2\varphi).$$

Fig. 268 a.

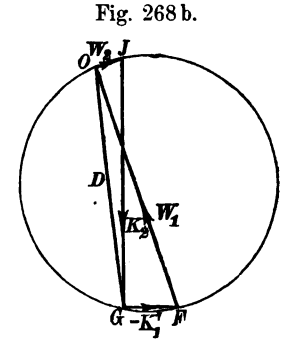
Für $\alpha_1 + 2\varphi = 90^0$ oder $\alpha_1 = 90^0 - 2\varphi$ mithin $\alpha_2 = 2\varphi$ wird $K_1 : K_2 = \infty$, oder das Hinaufkeilen unmöglich. Es fallen dann nämlich D und W_2 zusammen und klemmen den als zweiten Keil geltenden Pfosten fest.

Für die entgegengesetzte Bewegung, d. h. für gleichmässiges Hinablassen des Pfostens, gilt selbstverständlich

$$K_1' : K_2 = \operatorname{tg}(\alpha_1 - 2\varphi).$$

Für die meisten Fälle ist es wünschenswerth, dass der untere Keil selbstsperrend sei, d. h. dass für den Rückgang $K_1' < 0$ werde. Mithin muss $\alpha_1 < 2\,\varphi$ sein. Für diesen Fall gilt das Krafteck Fig. 268b, in welchem die den unteren Keil zurückziehende Kraft $-K_1' = GF$ ist. Der Druck D zwischen beiden Keilen bildet mit der Lothrechten den Winkel $OGJ = \alpha_1 - \varphi$. Würde dieser wegen $\alpha_1 = \varphi$ zu Null, so ergäbe sich D lothrecht und $OJ = W_2 = 0$. Unter diesen Umständen und ebenso für $\alpha_1 < \varphi$ würde sich der Pfosten beim Zurückziehen des unteren Keiles nicht mehr gegen die lothrechte Wand stützen; er würde vielmehr wegen des lothrechten D, welches dann $= K_2$ ist, durch den unteren Keil von der Wand abgezogen werden, würde auf dem Keile nicht abwärts gleiten, also auch nicht sinken; es würde also der Zweck der Rückwärtsbewegung nicht erreicht werden. Für $\alpha_1 < \varphi$ würde W_2 sogar negativ werden, d. h. es müsste der Pfosten durch eine besondere Kraft gegen die Wand gedrückt werden, um sich nicht von ihr zu entfernen. Daraus folgt, dass der Keilwinkel α_1 zwischen den Werthen φ und $2\,\varphi$ liegen muss, damit die Vorrichtung ihren Zweck erfülle.

Fig. 268b.

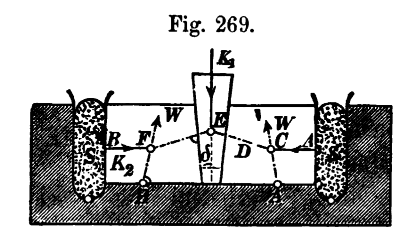


Zahlenbeispiel: Bei $f = 0{,}2$ oder $\varphi = 11^\circ$ und $\alpha_1 = 17^\circ$ mit $\operatorname{tg}\alpha_1 = 0{,}3$ wird $\operatorname{tg}(\alpha_1 + 2\,\varphi) = \operatorname{tg} 39^\circ = 0{,}8$, mithin $K_1 = 0{,}8\,K_2$ für Hinaufkeilen; $\operatorname{tg}(\alpha_1 - 2\,\varphi) = -\operatorname{tg}(5^\circ) = -0{,}09$, d. h. $-K_1 = 0{,}09\,K_2$ für Hinunterlassen.

Wirkung der Keilpresse. Dieselben Grundgedanken wie bei 2 Keilen gelten auch, wenn die Zahl der Keile grösser ist. Gleiten die Keile, so tritt an jeder Keilfläche ein Druck auf, der von der Normalen zur Keilfläche um den Reibungswinkel abweicht. An jedem Keile halten sich die Flächendrücke mit einer dritten Kraft K im Gleichgewichte, schneiden sich daher in einem Punkte. Bei gleichmässiger Bewegung bilden die 3 Kräfte jedes Keiles einen geschlossenen Streckenzug. Das ganze Krafteck aber bildet wiederum ein Krafteck der gegebenen Kräfte K mit seitwärts liegendem Pole. Die Polstrahlen sind die Drücke der Keilflächen; die dazu parallelen Richtungslinien dieser Kräfte bilden daher ein zu den Kräften K gezeichnetes Seileck. Letzteres gilt auch für den Ruhezustand der Keile, nur liegt dann der Pol nicht mehr bestimmt fest, sondern ist innerhalb gewisser Grenzen unbestimmt. Für die Seilecksseiten gelten dann dieselben Beschränkungen wie auf S. 211 angegeben.

Bei einer Keilpresse etwa zum Auspressen von Öl aus zerstampften Ölsamen (Fig. 269) wirkt K_1 als Triebkraft auf den mittleren Keil von Keilwinkel $2\,\delta$. Durch Niedertreiben dieses Keiles werden die Seitenkeile auf den wagerechten Gleitflächen auseinander getrieben und dadurch die Ölgutsäcke S, S gepresst, welche dabei die Gegendrücke K_2 leisten. $ACEFB$ ist die Drucklinie. Stellt man die Triebkraft K_1 durch GJ im

Fig. 269.



Krafteck (Fig. 269a) dar, so sind JO und GO die Gegendrücke D der beiden Seitenkeile, welche von der Wagerechten um $\delta + \varphi$ abweichen. Dadurch ist der Pol O bestimmt. Die Widerstände W der wagerechten Gleitflächen bilden mit der Lothrechten die Winkel φ und legen dann mit den Wagerechten durch G und J die Punkte L und M fest, wodurch $JL = GM = K_2$ bestimmt werden. Es ist dann im Dreieck OGJ:

Fig. 269 a.

$$K_1 : D = 2 \cdot \sin(\delta + \varphi),$$

im Dreieck OGM aber, weil $\measuredangle\, GOM = 90^0 - (\delta + 2\,\varphi)$:

$$K_2 : D = \cos(\delta + 2\,\varphi) : \cos\varphi,$$

mithin wird

$$1)\qquad \frac{K_1}{K_2} = 2\,\frac{\sin(\delta + \varphi)\cos\varphi}{\cos(\delta + 2\,\varphi)}.$$

Weil beim Keile gewöhnlich $\operatorname{tg}\delta$ gegeben ist, kann man vorstehende Formel zur bequemeren Berechnung (ohne trigonometrische Tabellen) umformen, indem man die zusammengezogenen Funktionen auflöst und in Zähler und Nenner mit $\cos\delta \cdot \cos^2\varphi$ theilt:

$$2)\qquad \frac{K_1}{K_2} = 2\,\frac{\operatorname{tg}\delta + f}{1 - f^2 - 2\,f\operatorname{tg}\delta}.$$

Zur Beurtheilung der Güte einer Maschine dient die Vergleichung der Arbeiten, welche von der Maschine übertragen bezw. aufgenommen werden. Der Zweck der Keilpresse besteht in dem Zusammenpressen des Gutes bei S. Rückt nun jeder Seitenkeil

um $\frac{1}{2}v$ nach aussen, während der Treibkeil sich um c abwärts bewegt, so verrichten die auf das Gut übertragenen Kräfte K_2 zusammen eine Arbeit $K_2 v$. Dies ist die Nutzarbeit; $K_1 c$ ist aber der Arbeitsaufwand. Das Verhältnis beider, nämlich

3) $$\eta = \frac{\textbf{Nutzarbeit}}{\textbf{Arbeitsaufwand}} = \frac{K_2 v}{K_1 c},$$

nennt man den Wirkungsgrad oder das Güteverhältnis der Maschine.

Das Verhältnis der Geschwindigkeiten v und c findet man aus dem geometrischen Zusammenhange der Maschine (Fig. 270). Rückt der Treibkeil um c abwärts, so drängt er jeden Seitenkeil um $\frac{1}{2}v$ zur Seite, wo $\frac{1}{2}v = c \operatorname{tg} \delta$. Daher ist hier

Fig. 270.

4) $$\eta = \frac{2 K_2}{K_1} \operatorname{tg} \delta .$$

Einen anderen Ausdruck kann man noch für den Wirkungsgrad η finden, wenn man sich die Maschine einmal ohne schädliche Reibungswiderstände als eine ideelle, vollkommene Maschine vorstellt. Nennt man die für eine solche nöthige Betriebskraft die ideelle Triebkraft $= K_0$, so wird, indem man in Gl. 2 $f = 0$ setzt,

5) $$\frac{K_0}{K_2} = 2 \operatorname{tg} \delta = \frac{v}{c}.$$

Führt man dies in Gl. 3 ein, so erhält man

6) $$\eta = \frac{K_0}{K_1} = \frac{\textbf{ideelle Triebkraft}}{\textbf{wirkliche Triebkraft}}.$$

Nach Gl. 5 ist $K_0 c = K_2 v$, d. h. bei einer vollkommenen Maschine würden Arbeitsaufwand und Nutzarbeit einander gleich oder der Wirkungsgrad gleich Eins sein. Eine Maschine ist mechanisch um so vollkommener, je mehr sie sich diesem ideellen Zustande nähert. Die Bezeichnung $K_0 c = K_2 v$ haben wir nur für diese besondere Maschine bewiesen; sie gilt aber allgemein. Bewegen sich nämlich alle Theile einer Maschine gleichförmig, so findet keine Zunahme des Arbeitsvermögens statt, also muss auch die gesammte Arbeit Null sein. Die inneren Spannkräfte einer vollkommenen Maschine verrichten aber nach S. 144 keine Arbeit. Die Widerstände völlig glatter Flächen, mit denen die einzelnen Maschinentheile in einander

greifen und an einander gleiten, ebenso wenig. Die Nutzlast wirkt in Bezug auf die Maschine stets der Bewegung ihres Angriffspunktes entgegen, verrichtet daher eine negative Arbeit, die im absoluten Sinne der Arbeit der Triebkraft gleich sein muss. Also

$$7)\qquad v : c = K_0 : K_2 .$$

Dies ist der schon von Galilei ausgesprochene Satz: „Was an Kraft gewonnen wird, geht an Geschwindigkeit (oder an Weg) verloren." Man kann also den Wirkungsgrad nach Willkür auf Grund der Gl. 3 oder der Gl. 6 berechnen.

Beispiel: Die Reibungsflächen der Keilpresse seien gut geglättet und geschmiert, daher $f = 0{,}1$. Auch in diesem Falle ist es möglich, den Treibkeil selbstsperrend anzuordnen; dies ist erfüllt, wenn wir etwa $\operatorname{tg} \delta = {}^1\!/_{20}$ annehmen. In Gl. 2 werden dann die Grössen f^2 und $2\, f \operatorname{tg} \delta$ nur je ${}^1\!/_{100}$ und können zur Vereinfachung gegen 1 vernachlässigt werden. Es ist nämlich zu bedenken, dass die Reibungsziffern in Wirklichkeit schwanken werden und selten mit grosser Genauigkeit zu schätzen sind. Daher ist in Gl. 2 der Zähler doch kaum auf 2 % genau zu berechnen, so dass die Vernachlässigung im Nenner durchaus zulässig erscheint. Ähnliches gilt in allen Fällen, in denen Reibungswiderstände eine wichtige Rolle spielen. Dann wird

$$K_1 = 2 \cdot (0{,}05 + 0{,}1)\, K_2 = 0{,}3\, K_2; \qquad v = 2\, c \cdot 0{,}05 = 0{,}1 \cdot c .$$

Der Wirkungsgrad $\eta = \dfrac{K_2\, v}{K_1\, c} = \dfrac{0{,}1}{0{,}3} = {}^1\!/_3$. Es würde ohne Reibung

$$K_0 = 2\, K_2 \operatorname{tg} \delta = 0{,}1\, K_2 ,$$

also auch $\eta = \dfrac{K_0}{K_1} = \dfrac{0{,}1\, K_2}{0{,}3\, K_2} = {}^1\!/_3$, wie vorstehend.

Bei dieser Maschine wird also von der aufgewandten Arbeit nur ein Drittel nützlich verwerthet, während zwei Drittel durch Reibung aufgezehrt werden. Die Keilpresse ist daher eine wenig vollkommene Maschine; Wasserdruckpressen z. B. arbeiten erheblich vortheilhafter. Die soeben besprochene Maschine hat aber Einfachheit und Billigkeit als Vorzüge.

Der Wirkungsgrad dieser Maschine nach Gl. 6 lässt sich, wenn man in Gl. 2 die erwähnte Vereinfachung

$$K_1 = 2\, K_2 (\operatorname{tg} \delta + f)$$

einführt, auch schreiben, weil $K_0 = 2\, K_2 \operatorname{tg} \delta$ ist,

$$8)\qquad \eta = \frac{\operatorname{tg} \delta}{\operatorname{tg} \delta + f} = \frac{1}{1 + \dfrac{f}{\operatorname{tg} \delta}} .$$

Vergrössert man $\operatorname{tg} \delta$, so verkleinert sich der Nenner, mithin wächst η. Macht man z. B. $\operatorname{tg} \delta = f$, so würde schon $\eta = {}^1\!/_2$ werden. Die beabsichtigte Selbstsperrung des Triebkeiles hat also den geringen Wirkungsgrad herbeigeführt. Es lässt sich zeigen, dass bei jeder Maschine, die selbstsperrend

sein soll, der Wirkungsgrad unter 0,5 liegen muss. Man kann nämlich setzen: $K_1 = K_0 + F$, wenn F der durch die Reibungswiderstände aufgezehrte Theil der Betriebskraft ist. Nimmt man nun an, dass beim Beginne der rückgängigen Bewegung der Reibungswiderstand annähernd noch dieselbe Grösse F behält, so gilt für den Rückgang $K_1' = K_0 - F$. Soll nun die Maschine sich selbst sperren, so muss $K_1' \leqq 0$, mithin $F \geqq K_0$ oder

$$K_1 \geqq 2\, K_0 \quad \text{sein, d. h.} \quad \eta = \frac{K_0}{K_1} \leqq \frac{1}{2}.$$

i) Drucklinie eines Gewölbes.

Auf S. 210 wurde gezeigt, dass die Drucklinie einer ruhenden Gruppe von 2 Keilen statisch unbestimmt ist, dass sie ein Seileck zu den Lasten K der Keile sein muss und dass ihre Seiten an zwei beschränkende Bedingungen gebunden sind. Auf S. 212 wurde dann weiter erläutert, dass diese Sätze von der Zahl der Keile unabhängig sind, also auch bei beliebig vielen Keilen Gültigkeit behalten.

Die einzelnen Steine eines (ohne Mörtel gedachten) Gewölbbogens sind nun auch keilförmige Körper. Soll ein Gewölbbogen in Ruhe sein können, so muss eine dem Ruhezustande entsprechende Drucklinie nachweisbar sein. Die Drucklinie ist ein zu den Gewichten der Gewölbtheile gezeichnetes Seileck. Die einzelnen Seiten desselben dürfen höchstens um den Reibungswinkel von der Normalen zu den Fugen abweichen und müssen die Fugen auch innerhalb des Bereiches der Berührung, d. h. innerhalb des Gewölbbogens schneiden.

Das Gewölbe möge symmetrisch zu einer lothrechten Mittelebene sein (auch bezüglich seiner Belastung). Betrachten wir diese Ebene als eine Schnittebene, so wird in ihr eine wagerechte Druckkraft, der Seitenschub H, wirken. Denn ein schräg gerichteter Scheiteldruck würde an der einen Hälfte nach oben, an der anderen aber zufolge des Gesetzes der Wechselwirkuug nach unten gerichtet sein, was jedoch der Symmetrie widerspricht. Theilt man nun den halben Bogen (Fig. 271) durch Fugen in eine beliebige Zahl von Theilen, deren Gewichte Q_1, Q_2, ... durch die Schwerpunkte der Theile hindurchgehen, so ist das Krafteck der Lasten Q leicht gezeichnet, indem man sie nach irgend einem Kräftemafsstab an einander reiht. Wäre nun der Seitenschub H bekannt, so würde man den Pol O in dem Abstande H dem oberen Endpunkte der Lasten gegenüber annehmen und hätte damit sämmtliche Polstrahlen. Wäre ausserdem noch der Angriffspunkt C des Scheiteldruckes gegeben, so hätte man die Seilecksseiten nur den

Polstrahlen der Reihe nach parallel zu ziehen und hätte damit das Seileck, d. h. die Drucklinie des Gewölbes. Den Punkt C wollen wir in der Mitte der Scheitelfuge annehmen. Die letzte Seite des Seilecks könnte nun vielleicht aus der inneren Leibung des Gewölbes treten; dann erkennt man, dass dieses Seileck eine mögliche Drucklinie nicht ist. Um aber ein flacher verlaufendes Seileck zu erhalten, braucht man nur den Polabstand H zu vergrössern, und zwar kann man leicht H so bestimmen, dass die letzte Seite die Kämpferfuge an einer bestimmten Stelle A, etwa in ihrer Mitte, schneide. In Fig. 271 ist nach willkürlicher Annahme des Poles O_1 das Seileck CA_1 gezeichnet. Verlängert man nun die letzte Seite des ersten Seilecks bis zum Schnitte P mit der Richtungslinie von H, so muss nach S. 119 das Gesammtgewicht R der Gewölbhälfte durch P gehen. Die Lage von R ist nur von der Form des Gewölbes abhängig, nicht aber von der willkürlich angenommenen Lage des Poles O. Für ein grösseres H und für ein wiederum durch C gehendes Seileck muss daher die letzte Seite ebenfalls durch P gehen. Zieht man also PA, so ist dies die Richtung der letzten Seite durch den gewünschten Punkt A. Eine Parallele zu AP durch D bestimmt den neuen Pol O, und OB ist nun der Scheitelschub, welcher einem durch C und A gehenden Seileck entspricht. Dass die Seiten des Seilecks von den Normalen zu den Fugen nicht zu viel abweichen, lässt sich ja nöthigenfalls durch Änderung der Fugenrichtung leicht erreichen. Wichtiger ist, dass die Drucklinie überall im Gewölbbogen verbleiben muss. Findet man eine solche Drucklinie, so ist der Ruhezustand gesichert.

Fig. 271.

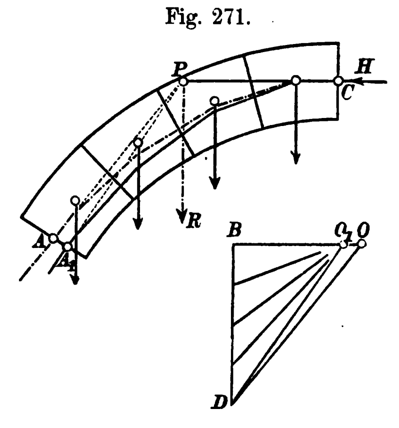
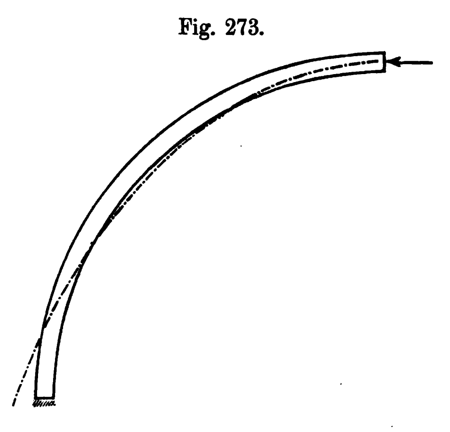


Fig. 272.

Wie schon gesagt, hat man, wenn das erste Seileck die innere Wölbfläche schneidet, H zu vergrössern, oder C nach oben zu verschieben, und umgekehrt. In Fig. 272 sind 2 vorläufige Seilecke

eingezeichnet, die den Bedingungen einer Drucklinie noch nicht entsprechen, aber durch Veränderung von H zu möglichen Drucklinien umzuwandeln sind. Schneidet ein Seileck (Fig. 273) erst die innere Wölblinie, kehrt dann durch dieselbe in das Gewölbe zurück und geht bei weiterem Verlaufe noch einmal durch die äussere Wölblinie, so ist Gleichgewicht unmöglich. Denn jede Änderung von H und C, die an der einen Stelle das Hinaustreten beseitigen könnte, müsste das Hinaustreten an der anderen Stelle noch verstärken; in solchem Falle kann nur eine Vergrösserung der Gewölbstärke oder eine Änderung der Gewölbform zum Ziele führen.

Fig. 273.



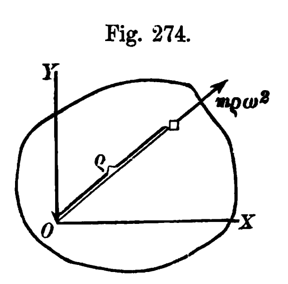
Auf diese Andeutungen über die Drucklinie in Gewölben müssen wir uns hier beschränken. Die wirkliche Lage des Scheitelschubes H und des Widerlagerdrucks W folgt aus dem elastischen Verhalten der Gewölbsteine und findet sich besprochen in Keck, Vorträge über Elasticitätslehre, S. 330 u. ff. Hat man aber die richtige Drucklinie gefunden, so geben die Polstrahlen des Kraftecks die Grösse der Druckkräfte in den einzelnen Fugen an.

II. Wirkung der Reibung bei gleichmässig sich drehenden Körpern.

Ein starrer Körper, der sich gleichförmig um eine feste Achse dreht, ist nicht im Gleichgewichte, weil die einzelnen Massentheilchen nicht geradlinige, sondern kreisförmige Bewegungen ausführen. Die Bedingungen für eine gleichförmige Drehbewegung lassen sich aber mit Hülfe des Satzes auf S. 141 aufstellen, wonach die Ergänzungskräfte den an dem Körper wirkenden äusseren Kräften das Gleichgewicht halten müssen.

Dreht sich der Körper mit der Winkelgeschwindigkeit ω um die Achse O rechtwinklig zur Bildebene (Fig. 274), so erfährt ein Massentheilchen m im Abstande ϱ von der Achse nach S. 88 die Centripetalbeschleunigung $\varrho\,\omega^2$; daher müssen sämmtliche Centrifugalkräfte $m\varrho\omega^2$ den äusseren Kräften gleichwerthig sein. Die äusseren Kräfte bestehen in bewegenden Kräften K, in den Normalwiderständen N der festen Achse O und in Reibungswiderständen der Lager der Drehachse. Da die Centrifugalkräfte sämmtlich durch O hindurchgehen, so haben sie in Bezug auf die Achse das Moment Null. Dieses muss also auch für die äusseren Kräfte gelten. Da nun die Normalwiderstände N ebenfalls durch O gehen, so ergiebt sich als wesentliche Bedingung der gleichförmigen Drehung, dass die Momentensumme der bewegenden Kräfte K und der Reibungswiderstände $f \cdot N$ in Bezug auf O zusammen Null betrage.

Fig. 274.



Die Normalwiderstände N der festen Drehachse sind im Allgemeinen von der Massenvertheilung des Körpers abhängig und werden erst weiter unten eingehend bestimmt werden. Jetzt wollen wir nur solche Fälle betrachten, bei denen die Masse derartig symmetrisch um die Achse vertheilt ist, dass jedem Massentheilchen im Abstande ϱ auf der einen Seite der Achse ein gleiches Massentheilchen in demselben Abstande auf der anderen Seite entspreche, so dass die Centrifugalkräfte dieser Massentheilchen sich gegenseitig aufheben, weshalb dann auch die sämmtlichen äusseren Kräfte sich vollständig aufheben, d. h. den Gleichgewichtsbedingungen genügen müssen. Aus diesem Grunde können die Fälle der gleichmässigen Drehung solcher Körper mit symmetrischer Massenvertheilung schon an dieser Stelle, d. h. in der Gleichgewichtslehre, behandelt werden

In den obigen Bedingungen wird nichts geändert, wenn zu der Drehung um die Achse O noch eine geradlinige und gleichmässige Verschiebung des Körpers mit seiner Achse kommt. Denn eine derartige Verschiebung bedingt keine Beschleunigung, also auch keine Ergänzungskräfte.

a) Reibungsmoment eines Tragzapfens.

Eine Achse sei rechtwinklig zu ihrer Mittellinie belastet und stütze sich mittels cylindrischer Zapfen auf cylindrische Lager, welche die Zapfen mit geringem Spielraum umschliessen. Auf einen Zapfen vom Halbmesser r komme ein durch die Zapfenmitte gehender Zapfendruck D, der rechtwinklig zur Längenachse des Zapfens steht, so dass die Cylinderfläche des Zapfens den Druck bekommt. Ein derartiger Zapfen heisst Tragzapfen.

Wir betrachten zuerst einen sog. eingelaufenen Zapfen (Fig. 275), der mit merklichem Spielraum im Lager liegt, und bei dem man annäherungsweise annehmen kann, die Berührung mit dem Lager finde nicht in einer grösseren Fläche, sondern in einer Seite des Cylinders (in der Figur durch einen Punkt dargestellt) statt. Im Ruhezustande würde A die Berührungsstelle sein. Dreht sich nun aber der Zapfen rechts herum, so gleitet bei A der Zapfen nach links; dem setzt sich der Widerstand fN nach rechts entgegen. Das Moment $fN \cdot r$ macht ein treibendes, die Reibung überwindendes Kräftepaar $\mathfrak{M}$ im Sinne der Drehung nöthig. Aber auch nach Anbringung desselben ist den Gleichgewichtsbedingungen noch nicht genügt, weil die Summe der wagerechten Kräfte nicht Null ist. Es kann daher im Zustande der Bewegung die Berührung nicht in A stattfinden; vielmehr verschiebt sich die Berührungsstelle nach rechts nach einem Punkte B (Fig. 276), der so liegt, dass dort die Mittelkraft W aus N und fN lothrecht gerichtet ist. Dies findet statt für $\measuredangle AOB = \varphi$. Es wird nun $W = D$, und beide bilden ein dem treibenden Momente $\mathfrak{M}$ widerstehendes Kräftepaar $Dr \sin\varphi = \mathfrak{M}$.

Fig. 275.

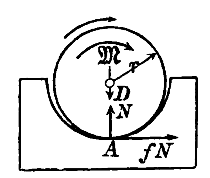
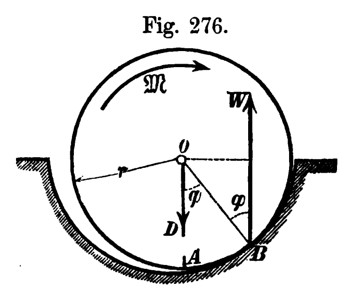


Fig. 276.



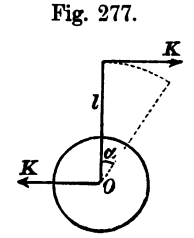
Nun ist $\operatorname{tg}\varphi = f$; weil aber bei geschmierten Drehzapfen, wie wir sie hier im Auge haben, fast stets $f \leq 0{,}1$ also $\varphi \leq 6^0$ und $\cos\varphi \geqq 0{,}995$, so ist bei derartig kleinen Winkeln $\sin\varphi$ mit

genügender Annäherung gleich $\operatorname{tg}\varphi = f$ zu setzen, so dass das für die gleichförmige Drehung erforderliche Kraftmoment, welches zugleich das Reibungsmoment bezeichnet, gesetzt werden darf

1) $$\mathfrak{M} = Dfr.$$

Es entspricht z. B. $f = 0{,}1$ dem Werthe $\sin\varphi = 0{,}0995$. Unmittelbar ergiebt sich Gl. 1 aus Fig. 275, wenn man daselbst, ohne Rücksicht auf den kleinen Verstoss gegen die Gleichung der wagerechten Kräfte, $N = D$ also $fN = fD$ einführt. Man denke sich also, um die Gl. 1 leicht zu merken, dass der Zapfendruck D eine Reibung fD und mit dem Hebelarm r ein Moment Dfr bedingt. Bringt man das Moment $\mathfrak{M}$ auf die Form Kl (Fig. 277), legt die eine Kraft durch O, die andere ans Ende eines Halbmessers l und lässt sich die Kräfte K bei der Drehung stets mitdrehen, so verrichtet die in O angreifende Kraft keine Arbeit; die am Endpunkte des Armes l aber während eines Drehungswinkels α die Arbeit $Kl\alpha = \mathfrak{M}\alpha$. Es ist also die Arbeit eines Kräftepaares gleich seinem Momente mal dem Drehungswinkel. Die Zapfenreibung erfordert hiernach einen sekundlichen Arbeitsaufwand $= \mathfrak{M}\omega \cdot = Dfr\omega$.

Fig. 277.



Als Arbeitseinheit dient das Meterkilogramm. Bei regelmässig umlaufenden Maschinen pflegt man aber die in jeder Sekunde geleistete Arbeit in mkg als Leistung, Arbeitsstärke oder Effekt $= E$ zu bezeichnen. Die Einheit der Leistung ist das Sekunden-Meterkilogramm $= 1\,\frac{\text{mkg}}{\text{s.}}$. Als grössere Einheit hat man die Pferdestärke $(PS) = 75\,\frac{\text{mkg}}{\text{s.}}$ eingeführt.

Ein lebendes Pferd leistet freilich eine sekundliche Arbeit von 75 mkg nur unter günstigen Umständen. Als aber James Watt i. J. 1782 Dampfmaschinen für Londoner Brauereien zu bauen hatte, kam es darauf an, diejenige Arbeit, die bisher von Pferden am Göpel verrichtet wurde, durch die Maschinen leisten zu lassen. Watt maſs daher die von den Pferden geleistete Arbeit, und eine Dampfmaschine, welche die Leistung von 10 Pferden ersetzte, wurde eine 10 pferdige Maschine genannt. Die dort benutzten Pferde waren sehr kräftig; auch wird Watt der Sicherheit wegen, damit seine Dampfmaschine keinen Misserfolg erlitte, die Arbeit der Pferde eher zu hoch als zu niedrig geschätzt haben. Auf diese Weise hat sich als Maschinen-Pferdestärke die

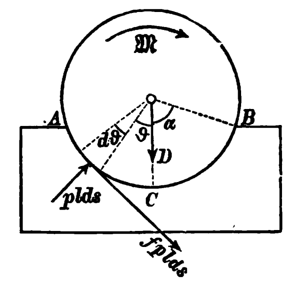
Leistung von $75 \frac{\text{mkg}}{\text{s.}}$ eingebürgert. Es wird dafür auch nicht selten Pferdekraft gesagt; doch ist diese Bezeichnung wenig passend, da man mit dem Ausdrucke doch nicht eine Kraft, sondern eine sekundliche Arbeit bezeichnen will.

Für die Anzahl der Pferdestärken wird das Zeichen N benutzt, während n die Zahl der Umdrehungen in einer Minute bedeutet.

Beispiel: Ein Wasserrad wiegt einschl. des darin befindlichen Wassers $10\,000^{\text{kg}}$; seine Achse werde durch 2 Zapfen von $r = 0{,}1^{\text{m}}$ Halbmesser getragen und mache 10 Umdrehungen in der Minute. Nimmt man $f = 0{,}1$ an, so ist, da die Summe der Zapfendrücke an beiden Tragzapfen $10\,000^{\text{kg}}$ beträgt, das gesammte Reibungsmoment $\mathfrak{M} = 10\,000 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}1 = 100^{\text{mkg}}$. Bei $n = 10$ ist der Drehungswinkel in der Minute $20\,\pi$, in der Sekunde also $20\,\pi : 60 = {}^1/_3\,\pi = 1{,}047$, daher die sekundl. Reibungsarbeit $E = 104{,}7 \frac{\text{mkg}}{\text{s.}}$ und der Reibungsverlust in Pferdestärken $N = 104{,}7 : 75 = 1{,}396\ PS$.

Bei einem neuen Tragzapfen findet die Berührung längs einer grösseren, dem Mittelpunktswinkel $2\,\alpha$ entsprechenden Fläche ACB statt (Fig. 278). Ist l die Länge des Zapfens und p der Druck für die Flächeneinheit an irgend einer Stelle, so kommt auf ein Theilchen $l\,ds$ der Cylinderfläche der Druck $p\,l\,ds$ und die Reibung $f\,p\,l\,ds$. Das treibende Moment muss dann betragen

Fig. 278.



$$\mathfrak{M} = f\,l\,r \int p\,ds\,.$$

Macht man die Voraussetzung, dass der Zapfen überall gleich stark anliegt, so wird

$$\mathfrak{M} = f\,p\,l\,r \int ds = 2\,f\,p\,l\,r^2\alpha\,.$$

Nun muss aber $$D = p\,l \int \cos\vartheta\,ds$$

sein, oder, weil $ds \cos\vartheta = dx$

$$D = p\,l \int dx\,.$$

Darin ist $\int dx$ die Sehne $AB = 2\,r \sin\alpha$, mithin

$$D = 2\,p\,l\,r \sin\alpha\,.$$

Dann wird $\dfrac{\mathfrak{M}}{D} = f\,r \dfrac{\alpha}{\sin\alpha}$ oder

$$\mathfrak{M} = f\,D\,r \frac{\alpha}{\sin\alpha} = f\,D\,r \frac{\overset{\frown}{AB}}{\overline{AB}}\,. \tag{2}$$

Hiernach ist beim neuen Zapfen, weil wegen des theilweise keilförmigen Einpressens die Summe der Normaldrücke grösser ist als D,

auch die Reibung grösser als beim eingelaufenen Zapfen, u. zw. im Verhältnisse des Bogens zur Sehne.

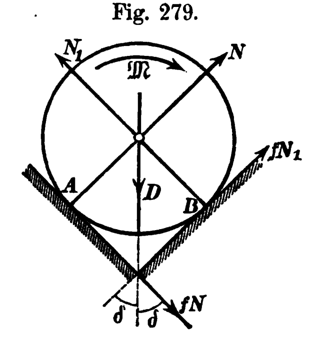
$$a = 0 \text{ giebt wieder } \mathfrak{M} = D f r;$$
$$a = \tfrac{1}{2}\pi \text{ aber } \mathfrak{M} = D f r \tfrac{1}{2}\pi = 1{,}57\, D f r.$$

Die Reibungswiderstände geben nach senkrechter oder wagerechter Richtung zerlegt, Seitenkräfte, die in senkrechter Richtung die Summe Null liefern, in wagerechter Richtung aber nicht. Daher besteht bei vorstehender Ableitung ein ähnlicher kleiner Verstoss gegen die Gleichung der wagerechten Kräfte wie bei Benutzung der Fig. 275 zur schnellen Entwickelung der Gl. 1.

Eine diesen Umstand berücksichtigende schärfere aber umständlichere Behandlung ergiebt wiederum, dass für f eigentlich $\sin\varphi$ gesetzt werden müsste.

Beim Zapfen im Keillager (Fig. 279) werden die beiden Reibungswiderstände fN und fN_1 wiederum die Zapfen einseitig nach rechts hinüber drücken, in Folge dessen N_1 etwas $> N$ sein muss. Nimmt man aber trotzdem annäherungsweise $N_1 = N$ an, so ergiebt sich in lothrechter Richtung

Fig. 279.



$$2\, N \sin\delta = D, \quad \text{also} \quad 2\, N = \frac{D}{\sin\delta},$$

$$3) \qquad \text{und} \quad \mathfrak{M} = 2 f N r = \frac{D f r}{\sin\delta}.$$

Der Ersatz des eingelaufenen cylindrischen Lagers durch das Keillager bewirkt daher, dass wegen des keilförmigen Einpressens $\mathfrak{M}$ grösser wird als beim cylindrischen Lager, dass man aber, wie bei der Bewegung in Keilnuthen (S. 197), statt f einfach den grösseren Werth $f : \sin\delta$ zu setzen hat. $\delta = 30^0$ giebt $f : \sin\delta = 2 f$, entsprechend einer Verdoppelung des Reibungsmoments.

Mit Rücksicht auf den Unterschied zwischen N und N_1 muss stattfinden

1. in wagerechter Richtung
$$0 = N\cos\delta + f N \sin\delta - N_1 \cos\delta + f N_1 \sin\delta;$$
2. in senkrechtem Sinne
$$D = N \sin\delta - f N \cos\delta + N_1 \sin\delta + f N_1 \cos\delta;$$
3. $\mathfrak{M} = f (N + N_1)\, r$.

Die ersten beiden Gleichungen lassen sich ordnen:

$$0 = -(N_1 - N)\cos\delta + (N + N_1) f \sin\delta$$
$$D = (N_1 - N) f \cos\delta + (N + N_1)\sin\delta.$$

Multiplicirt man die erstere dieser Gleichungen mit f, so entsteht durch Zusammenzählen

$$D = (N + N_1)(1 + f^2)\sin\delta \quad \text{und}$$
$$\mathfrak{M} = \frac{D f r}{\sin\delta\,(1 + f^2)}.$$

Darin ist $\frac{f}{1 + f^2} = \frac{\operatorname{tg}\varphi}{\sec^2\varphi} = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}\cos^2\varphi = \sin\varphi\cos\varphi = \frac{\sin 2\varphi}{2}$

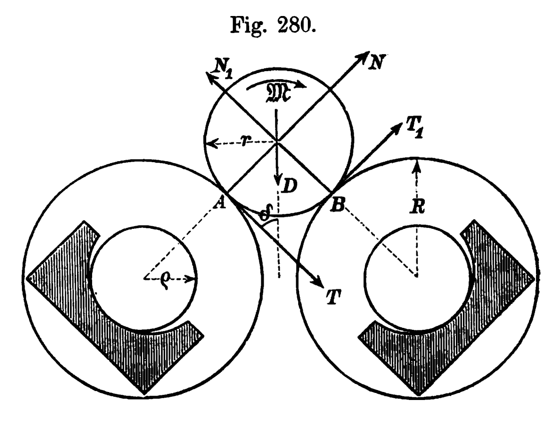
also $\mathfrak{M} = D r \frac{\sin 2\varphi}{2\sin\delta}.$

Bei $f = 0{,}1$ kann aber f^2 gegen 1 vernachlässigt oder $\sin 2\varphi = 2\operatorname{tg}\varphi$ gesetzt werden, so dass dann wieder als Annäherung Gleichung 3 entsteht.

Dem Nachtheile der Vergrösserung der Reibung durch Benutzung des Keillagers steht der Vortheil gegenüber, dass der Zapfen im Keillager auch nach erfolgter Abnutzung immer noch eine sichere Führung findet, während er im eingelaufenen cylindrischen Lager um das Mafs des Spielraumes hin und her schleudern kann. Das Keillager wird deshalb besonders bei Mess-Instrumenten angewandt, bei denen es mehr auf sichere Lage als auf Kleinheit der Reibung ankommt.

Die Bewegung auf **Reibungsrollen** (Fig. 280) von möglichst grossem Halbmesser R, welche sich um Zapfen vom Halbmesser ϱ drehen, hat den Zweck der Verminderuug des Reibungsmoments. Der obere Zapfen vom Halbmesser r erfährt von den Rollen bei A und B die Normaldrücke N und N_1. An den Berührungsstellen A und B findet aber kein Gleiten statt, vielmehr haben die Rollen dort dieselbe Umfangsgeschwindigkeit wie die Zapfen; daher tritt an diesen Stellen nicht der Gleitwiderstand fN und fN_1 auf, sondern Reibungswiderstände T und T_1, die im Allgemeinen kleiner sind. Es wird

Fig. 280.



$$\mathfrak{M} = (T + T_1)\,r.$$

Die Kräfte T und T_1 wirken auf die Rollen im entgegengesetzten Sinne wie auf den Zapfen und bewirken die gleichmässige Drehung der Rollen, haben also deren Zapfenreibung zu überwinden.

Die thatsächliche Ungleichheit von N und N_1 würde in derselben Weise sich geltend machen wie im vorigen Falle; sie hat auf das wirkliche Ergebnis keinen nennenswerthen Einfluss, soll daher der Einfachheit wegen vernachlässigt werden.

Die Drücke $N = N_1$ bilden (ebenfalls umgekehrt) die Zapfendrücke in den Lagern der Rollen, erzeugen dort die Reibungsmomente $Nf\varrho$ und müssen durch die Momente der Umfangskräfte $T = T_1$ überwunden werden. Daher wird $TR = Nf\varrho$, $T = Nf\frac{\varrho}{R}$ und $\mathfrak{M} = 2\,Nf\frac{\varrho}{R}r$. Am Zapfen liefert aber die Gleichung der lothrechten Kräfte wieder $D = 2\,N \sin\delta$, wenn δ der Winkel ist, den die Tangenten in A und B mit der lothrechten Mittellinie bilden; hiernach wird

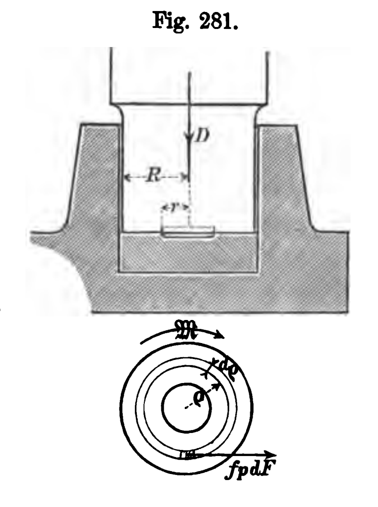
$$\mathfrak{M} = \frac{Dfr}{\sin\delta}\,\frac{\varrho}{R}. \tag{4}$$

Damit dies kleiner werde als Dfr, muss $\varrho : R < \sin\delta$ sein. $\sin\delta = 1/2$ und $\varrho : R = 1/6$ geben $\mathfrak{M} = \frac{1}{3}Dfr$.

b) Reibungsmoment eines Stützzapfens.

Beim Stütz- oder Spurzapfen (Fig. 281) wirkt der Druck D in der Achsenrichtung desselben. Die Berührung mit der Spurplatte des Lagers erfolge (der Allgemeinheit wegen) in einer Ringfläche der Halbmesser r und R. Zeichnet man im Grundriss einen schmalen Ring vom Halbmesser ϱ und der Breite $d\varrho$, so kommt auf ein Theilchen dF desselben ein Druck $p\,dF$, wenn p der Druck für die Flächeneinheit. Dieser Druck liefert eine Reibung $fp\,dF$ und ein Reibungsmoment $d\mathfrak{M} = fp\,dF\varrho$. Da man annehmen darf, dass im ganzen Umkreise dieses Ringes p denselben Werth haben wird, so kann

Fig. 281.



man dF sogleich als die Ringfläche $2\varrho\pi d\varrho$ einführen und erhält als gesammtes Reibungsmoment

$$1)\qquad \mathfrak{M} = 2\pi f\int_r^R p\varrho^2 d\varrho.$$

Ausserdem muss, da der schmale Ring den Druck $p\,2\pi\varrho d\varrho$ aufnimmt,

$$2)\qquad D = 2\pi\int_r^R p\varrho\, d\varrho \quad \text{sein.}$$

Beim neuen Zapfen nimmt man den Druck p überall gleich an, daher $p = \frac{D}{(R^2 - r^2)\pi}$ und

$$3)\qquad \mathfrak{M} = \frac{2Df}{R^2 - r^2}\int_r^R \varrho^2 d\varrho = \frac{2}{3}Df\frac{R^3 - r^3}{R^2 - r^2}.$$

Ist die Berührungsfläche ein voller Kreis ($r = 0$), so wird

$$4)\qquad \mathfrak{M} = \frac{2}{3}DfR,$$

also kleiner als beim Tragzapfen. Es kommt dies daher, dass, während beim Tragzapfen die ganze Reibung Df an dem vollen Halbmesser als Hebelarm wirkt, hier die Hebelarme der Reibungswiderstände im Allgemeinen kleiner sind als der äussere Halbmesser.

Beim eingelaufenen Zapfen sind die Verhältnisse noch günstiger. Mit der gleitenden Bewegung des Zapfens ist nämlich eine Abnutzung, ein fortwährendes Abschleifen verbunden, und da die Gleitgeschwindigkeit nach dem äusseren Umfange hin zunimmt, so wird auch hier die Abnutzung am grössten ausfallen; in Folge dessen wird das Aufliegen des Zapfens auf der Spurplatte nach einiger Zeit nicht mehr ein gleichmässiges sein; es wird der Einheitsdruck von innen nach aussen hin abnehmen. Über die Veränderlichkeit von p wird die Annahme gemacht, dass p mit ϱ umgekehrt proportional sei, dass man

$$5)\qquad p = \frac{p_1}{\varrho}$$

setzen könne, worin p_1 der Einheitsdruck im Abstande Eins von der Drehachse. Dann wird aus Gl. 2:

$$D = 2\pi p_1\int_r^R d\varrho = 2\pi p_1 (R - r),$$

aus Gl. 1 aber:

$$\mathfrak{M} = 2\pi f p_1 \int_r^R \varrho\, d\varrho = \pi f p_1 (R^2 - r^2).$$

Theilt man diese Gleichung durch die vorhergehende, so wird

$$\mathfrak{M} : D = {}^1/_2 f (R + r) \quad \text{also}$$

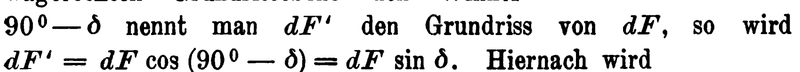
6) $$\mathfrak{M} = {}^1/_2 D f (R + r).$$

Es ist jetzt offenbar $^1/_2\,(R + r)$ der mittlere Hebelarm der Reibung. Für volle Kreisfläche $(r = 0)$ wird

7) $$\boldsymbol{M = {}^1/_2 D f R.}$$

Beim kegelförmigen Stützzapfen (Fig. 282) möge die Berührungsfläche von C bis B sich erstrecken. Ist dF ein Flächentheilchen derselben mit dem Einheitsdrucke p, so wird $\mathfrak{M} = f \int p\, dF \varrho$. Da aber $p\, dF$ mit der Wagerechten den Winkel δ bildet, so ist

Fig. 282.



$$D = \sin\delta \int p\, dF.$$

Das Flächentheilchen dF bildet mit der wagerechten Grundrissebene den Winkel $90^0 - \delta$ nennt man dF' den Grundriss von dF, so wird $dF' = dF \cos(90^0 - \delta) = dF \sin\delta$. Hiernach wird

$$D = \int p\, dF' \quad \text{und}$$

$$\mathfrak{M} = \frac{f}{\sin\delta} \int p\, dF' \varrho.$$

Da nun dF' mit $2\varrho\pi d\varrho$ eingeführt werden kann, so wird

$$\mathfrak{M} = \frac{2\pi f}{\sin\delta} \int_r^R p \varrho^2 d\varrho \quad \text{und}$$

$$D = 2\pi \int_r^R p\, \varrho\, d\varrho$$

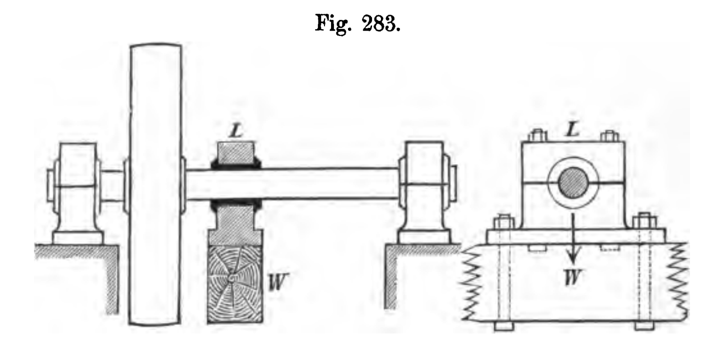
Vergleicht man diese Werthe mit den Gl. 1 und 2, so erkennt man, dass der Ausdruck für D völlig mit Gl. 2 übereinstimmt, während in dem Werthe für $\mathfrak{M}$ nur f mit $f : \sin\delta$ vertauscht ist als Folge des kegelförmigen Einpressens, wie in allen ähnlichen Fällen. Daher muss sowohl in den Gl. 3 und 4 für einen neuen Zapfen, sowie auch in den Gl. 6 und 7 für den eingelaufenen Zapfen f vertauscht werden mit $f : \sin\delta$.

Der kegelförmige Zapfen verursacht also mehr Reibung als der ebene Stützzapfen, gewährt aber auch, wie das Keillager, den Vortheil einer sicheren Führung, wogegen der Stützzapfen mit ebener Reibungsfläche eine solche nicht bietet, weil an der cylindrischen Seitenwand des Lagers sich Spielraum befindet oder bilden muss.

c) Hirn'sche Reibungswaage.

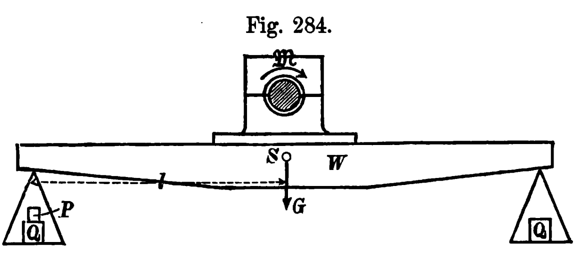
Die vom elsässischen Ingenieur Adolf Hirn im Jahre 1854 ersonnene Vorrichtung (Fig. 283 und 284) dient zur Ermittelung

Fig. 283.



der Reibungsziffer f eines Zapfenlagers durch Abwägen. Auf einer Welle, die von einer Maschine etwa mittels Riemscheiben in gleichmässige Drehung versetzt wird, befindet sich der zu untersuchende Lagerkörper L, der aber nicht etwa zur Stützung der Welle dient, sondern an der Welle hängt. Unten an dem Lagerkörper ist ein Waagebalken W befestigt, an dessen gleichen Armen Waagschalen hängen. Die Waagschalen werden mit Gewichten beschwert, so dass der für die Versuche gewünschte Zapfendruck D entsteht, welcher das Reibungsmoment Dfr erzeugt. Dieses Moment, welches vom Lager auf den Zapfen als ein der Drehung entgegen gerichtetes Moment ausgeübt wird, hat nach dem Gesetze der

Fig. 284.



Wechselwirkung das Bestreben, den Lagerkörper bei der Drehung

mitzunehmen, den Waagebalken also schräg zu stellen. Diesem Bestreben wirkt man entgegen, indem man in der linksseitigen Waagschale ein Übergewicht P anbringt (Fig. 284) und dieses so regelt, dass der Balken wagerecht einspielt. Der Zapfendruck beträgt $D = 2Q + P + G$, wenn G das Eigengewicht des Lagers mit dem Balken. Das Reibungsmoment beträgt also $\mathfrak{M} = (2Q + P + G)fr$ und wird gemessen durch das Moment des Übergewichtes P, d. h. $\mathfrak{M} = Pl$. Das ergiebt

$$f = \frac{Pl}{(2Q + P + G)r}.$$

Beispiel: Bei $l = 1^{m}$, $r = 0{,}05^{m}$, $G = 100^{kg}$; $Q = 2000^{kg}$ sei das Übergewicht $P = 2{,}0^{kg}$; dann ist $f = \frac{2{,}0 \cdot 1}{(4000 + 102)\,0{,}05} = 0{,}0098$.

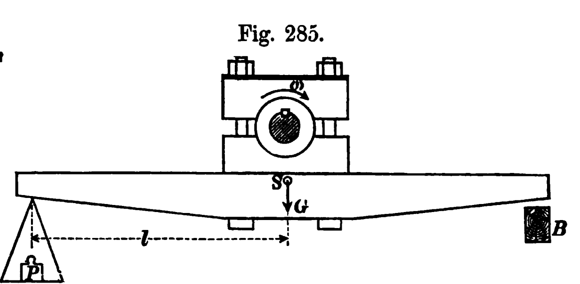
Damit der Balken gut einspiele, muss, wie bei einer Waage, der Schwerpunkt S unterhalb der Drehachse liegen.

d) Der Bremszaum von Prony.

Der Grundgedanke der vom franz. Ingenieur Prony 1821 ersonnenen Vorrichtung zum Messen der Leistung von Kraftmaschinen ist dem der Reibungswaage ähnlich.

Man hebt nämlich die Triebkraft der zu untersuchenden Maschine durch einen Reibungswiderstand auf und misst diesen mittels einer Waage. Da es in diesem Falle nur darauf ankommt, den ganzen Betrag der Reibung zu messen, es aber nicht nöthig ist, diese, wie bei der Reibungswaage, nachträglich in die Faktoren f und D zu zerlegen, so ist es auch nicht erforderlich, die Reibung durch eine Belastung zu erzeugen; vielmehr kann man sie einfacher durch Zusammenschrauben zweier Bremsklötze hervorbringen (Fig. 285), Auf der Welle der Kraftmaschine befestigt man eine Bremsscheibe und bringt auf dieser den Bremszaum an, dessen Schrauben vorläufig schwach angezogen werden. Dann setzt man die Kraftmaschine

Fig. 285.



etwa eine Dampfmaschine, allmählich in Gang und zieht die Schrauben stärker an; die an dem Umfange der Scheibe entstehende Reibung hat nun das Bestreben, den Zaum mitzunehmen, in Folge dessen sich der Waagebalken unten rechts auf eine als Hindernis dienende Schwelle B legt. Man bringt sodann die Dampfmaschine in den Zustand, in welchem sie beim regelrechten Betriebe arbeiten soll, zieht also die Bremsschrauben stärker an, wenn die Welle zu schnell läuft, und umgekehrt. Hat man auf diese Weise erreicht, dass die Welle die vorgeschriebene Zahl von n Umdrehungen in der Minute ausführt, so wird jetzt offenbar, weil ein regelmässiger Gang stattfindet, die ganze Arbeit der Maschine durch den Bremszaum in Reibung umgewandelt. Belastet man nun die linksseitige Waagschale mit einem Gewichte P (einschliesslich der Waagschale) in dem Maße, dass der Balken sich rechts von der Schwelle abhebt und wagerecht einspielt, so ist Pl das Maß des an der Scheibe wirkenden Reibungsmomentes $\mathfrak{M}$. Die sekundliche Arbeit desselben beträgt mithin $\mathfrak{M}\,\omega = Pl\,\omega$, oder, weil $\omega = \frac{2\,n\,\pi}{60}$ ist und $75\,\frac{\text{mkg}}{\text{s.}}$ eine Pferdestärke ausmachen, es ist die Anzahl N der Pferdestärken der Maschine

$$N = Pl\,\frac{n\,\pi}{30 \cdot 75}.$$

Beispiel: Ist $l = 2{,}5$ m; $P = 200$ kg; $n = 30$, so wird

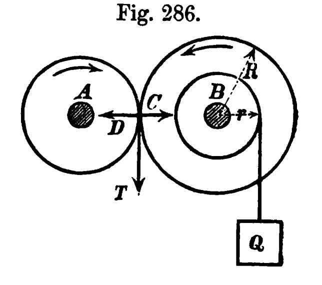
$$N = \frac{200 \cdot 2{,}5 \cdot 30 \cdot \pi}{30 \cdot 75} = 20{,}9\ PS.$$

Auch bei dieser Vorrichtung ist es wünschenswerth, dem Waagebalken Standsicherheit zu geben, d. h. den Schwerpunkt S unterhalb der Achse anzuordnen, was hier erreicht ist, indem der schwere Balken sich unterhalb der Bremsklötze befindet.

e) Reibungsräder.

Die Reibung zwischen 2 an einander gepressten Scheiben kann benutzt werden, um die Drehung der einen auf die andere zu übertragen. A (Fig. 286) sei die treibende, B die mitzunehmende Welle. Auf beiden bringt man Scheiben an, die sich bei C berühren. Liesse man die Scheiben mittels zahnartiger Vorsprünge in einander greifen, so würde dadurch eine Mitnahme der Welle B

Fig. 286.



erzwungen. Lässt man aber die Vorsprünge fort, so kann auch die Reibung die Wirkung der Zähne ersetzen.

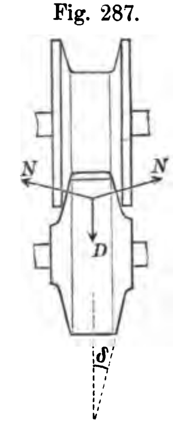
An der Welle B möge ein Widerstandsmoment $\mathfrak{M}$ der Drehung entgegenwirken; dieses kann man durch eine Last Q, welche an einer Trommel vom Halbmesser r emporgewunden wird, zur Darstellung bringen, indem dann $\mathfrak{M} = Qr$. Zur Überwindung des Momentes ist eine Umfangskraft T bei C erforderlich, für welche $TR = Qr$ also $T = Qr : R$ wird. Ist nun D der Druck zwischen den Scheiben, so würde demselben beim Gleiten die Reibung fD entsprechen. Hier soll aber kein Gleiten stattfinden, vielmehr sollen die Scheiben stets gleiche Umfangsgeschwindigkeit haben. Unter diesen Umständen ist dann die zur Wirkung kommende Reibung $T \leqq fD$, mithin

1) $$Q\frac{r}{R} \leqq fD \quad \text{oder} \quad D \geqq \frac{Q}{f}\frac{r}{R}.$$

Das Zeichen = in Gl. 1 würde auch noch für ein Gleiten der Scheiben auf einander gelten; soll dies ausgeschlossen sein, also ein sicheres Mitnehmen der Welle B erfolgen, so muss für D das Zeichen > angewendet werden.

Beispiel: Ist das Widerstandsmoment $\mathfrak{M} = 100 \cdot 0{,}2 = 20$ mkg, $R = 0{,}6$ m, $f = 0{,}1$ für Gusseisen auf Gusseisen, so wird $D > \frac{20}{0{,}1 \cdot 0{,}6} = 333$ kg. Bei $D = 333$ kg würde leicht noch ein Gleiten eintreten können, so dass die Last Q abwärts gehen könnte; man muss D um ein gewisses Mafs > 333 kg nehmen, damit man Sicherheit gegen Zufälligkeiten hat.

Fig. 287.



Der Druck D kann nur durch die Zapfenlager auf die Räder übertragen werden, erzeugt daher Zapfenreibung, deren Überwindung Arbeit kostet. Man muss suchen, das erforderliche D klein zu machen; dies wird erreicht, indem man die Reibungsräder nicht einfach cylindrisch gestaltet, sondern keilförmig in einander greifen lässt (Fig. 287), wodurch eine Vergrösserung der Reibung entsteht. Ist wieder der halbe Keilwinkel δ, so wird $D = 2N \sin\delta$, die mögliche Reibung

2) $$2fN = \frac{Df}{\sin\delta} > \frac{Qr}{R} \quad \text{oder} \quad D > Q\frac{\sin\delta}{f}\frac{r}{R},$$

d. h. kleiner als nach Gl. 1. Dass man bei der jetzigen Anwendung

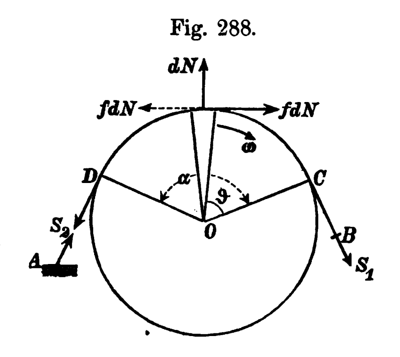
der sog. **Keilnuthenräder** mehrere Keilnuthen neben einander anordnet, hat mit der Wirkung nichts zu thun.

Beispiel: Macht man $2\delta = 30^0$, so ist $\sin\delta = 0{,}26$, und es wird mit den sonstigen Zahlen des vorhergehenden Beispiels der untere Grenzwerth von D: $333 \cdot 0{,}26 = 87^{\text{kg}}$, also nur etwas mehr als $^1/_4$ des vorigen.

f) Seilreibung.

1. Über einen Cylinder vom Halbmesser r, der sich gleichförmig um eine Achse O dreht (Fig. 288), sei ein biegsames Seil, ein biegsamer Faden, Riemen oder dgl. gelegt, bei A befestigt und bei B am freien Ende mit einer Kraft S_1 gespannt, dann drückt das Seil gegen den Cylinderumfang; an einem Bogentheilchen $ds = r\,d\vartheta$ entsteht ein Normaldruck dN und ein Gleitwiderstand $f\,dN$, der auf den sich rechts drehenden Cylinder nach links, auf das Seil aber nach rechts wirkt, das Seil also mitzunehmen strebt. In dem bei A befestigten Seilstücke möge

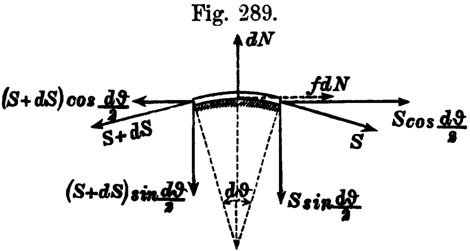
Fig. 288.



eine Spannkraft S_2 herrschen, dann befindet sich das Seil unter Einwirkung der an ihm auftretenden Kräfte S_1, S_2 Gruppe $[dN]$ und Gruppe $[f\,dN]$ im Gleichgewichte, so dass die Momentengleichung in Bezug auf O liefert (weil die dN-Kräfte durch O gehen): $S_1 r + rf\Sigma dN = S_2 r$, d. h. die gesammte Seilreibung $f\Sigma dN$ wird gemessen durch den Unterschied der Seilkräfte $S_2 - S_1$. Um also die gesammte Seilreibung zu finden, müssen wir $S_2 - S_1$ zu ermitteln suchen.

Schneiden wir aus dem Seile das Bogentheilchen $ds = r\,d\vartheta$ heraus (Figur 289), so wirken ausser den Kräften dN

Fig. 289.



und $f\,dN$ noch die Spannkräfte S und $S + dS$. Zerlegt man sämmtliche Kräfte || und ⊥ zu dN, so verlangt das Gleichgewicht

$$dN = (S + S + dS)\sin {}^1/_2\, d\vartheta$$

$$f\,dN = dS \cos {}^1/_2\, d\vartheta,$$

oder weil $\sin {}^1/_2\, d\vartheta = {}^1/_2\, d\vartheta$, $\cos {}^1/_2\, d\vartheta = 1$ und $dSd\vartheta$ unendlich klein zweiter Ordnung:

$$dN = Sd\vartheta$$
$$f dN = dS, \text{ mithin}$$
$$f d\vartheta = dS : S.$$

Durch Integration entsteht:

$$f\vartheta = \mathrm{l}\, S + C.$$

$\vartheta = 0$ entspreche dem Punkte C (Fig. 288) und der Spannkraft S_1, $\vartheta = a$ dem Punkte D und der Spannkraft S_2, dann wird $fa = \mathrm{l}\, S_2 + C$; $o = \mathrm{l}\, S_1 + C$, mithin aus beiden:

2) $$fa = \mathrm{l}\left(\frac{S_2}{S_1}\right) \text{ oder } \frac{S_2}{S_1} = e^{fa},$$

und die ganze Seilreibung

3) $$S_2 - S_1 = S_1 (e^{fa} - 1).$$

Dabei ist besonders bemerkenswerth, dass das Verhältnis der Kräfte unabhängig ist von r, nur abhängig von der Reibungsziffer und dem dem umspannten Bogen entsprechenden Mittelpunktswinkel a.

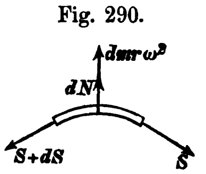
Wenn der Cylinder ruht, so wird die Summe aller zur Wirkung kommenden Reibungswiderstände $\int dT$ ebenfalls durch $S_2 - S_1$ gemessen; es ist dann aber

$$S_2 : S_1 < e^{fa} \text{ und auch}$$
$$S_2 - S_1 < S_1 (e^{fa} - 1).$$

Für $S_2 = S_1$ würde keine Reibung ausgeübt werden. Bei einem Unterschiede zwischen S_1 und S_2 bezeichnen wir mit S_2 stets die grössere der Kräfte.

2. Ist das Seil nicht in Ruhe, sondern wird es mit gleichbleibender Geschwindigkeit $v = r\omega$ über den ruhenden oder mit anderer Geschwindigkeit sich drehenden Cylinder fortgezogen, so heben sich an einem Bogentheilchen $r d\vartheta$ die normal gerichteten Kräfte nicht auf, sondern es geschieht dies erst, nachdem die Centrifugalkraft $dm\, r\, \omega^2$ hinzugefügt ist (Fig. 290). Es wird dann

Fig. 290.



$$dN = Sd\vartheta - dm\, r\, \omega^2.$$

Darin ist $dm = \frac{\gamma}{g} F r d\vartheta$, wenn F der Querschnitt, γ die Dichte des Fadens, Riemens oder Seiles. Die andere Gleichung $f dN = dS$ bleibt unverändert; weil nun

$$d\left(S - \frac{\gamma}{g} F r^2 \omega^2\right) = dS,$$

so wird

$$f d\vartheta = \frac{d\left(S - \frac{\gamma}{g} F r^2 \omega^2\right)}{S - \frac{\gamma}{g} F r^2 \omega^2},$$

also $$f\vartheta = \mathrm{l}\left(S - \frac{\gamma}{g} F r^2 \omega^2\right) + C,$$

oder zwischen Grenzen genommen:

$$f\alpha = \mathrm{l}\,\frac{S_2 - \frac{\gamma}{g} F r^2 \omega^2}{S_1 - \frac{\gamma}{g} F r^2 \omega^2}.$$

Daraus entsteht:

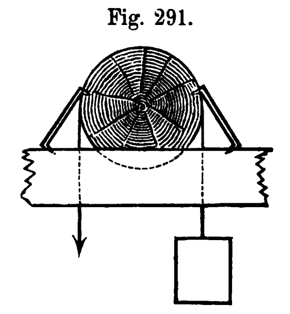
$$S_2 - \frac{\gamma}{g} F r^2 \omega^2 = \left(S_1 - \frac{\gamma}{g} F r^2 \omega^2\right) e^{f\alpha}, \text{ oder}$$

$$4) \qquad S_2 - S_1 = \left(S_1 - \frac{\gamma}{g} F r^2 \omega^2\right)(e^{f\alpha} - 1).$$

In den meisten Fällen ist der Einfluss des Gliedes $\frac{\gamma}{g} F r^2 \omega^2$ unbedeutend; nur bei grossen Geschwindigkeiten $r\omega$ verdient er Berücksichtigung (vergl. S. 238).

Beispiel: Ein runder Baum sei auf einer Schwelle festgelegt (Fig. 291) und ausserdem durch Zimmermannshaken gehalten. Ein Seil sei derartig hinübergeschlungen, dass $\alpha = \pi$. An der rechten Seite hänge eine Last von 1000 kg. Es soll berechnet werden, mit welcher Kraft links gezogen werden muss, um die Last hinauf zu ziehen. Da ausser der Last noch die Reibung überwunden werden muss, so wird links die grössere Kraft S_2 wirken, während rechts $S_1 = 1000$ kg ist. Die Reibungsziffer werde für ein Hanfseil auf Holz $f = 1/3$ angenommen.

Fig. 291.



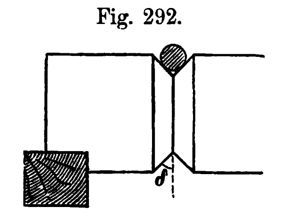
$$S_2 : S_1 = e^{1/3\,\pi}.$$

Nimmt man von beiden Seiten der Gleichung die Briggischen Logarithmen, so wird $\log\left(\frac{S_2}{S_1}\right) = \frac{1}{3}\pi \log e = 1{,}047 \cdot 0{,}434 = 0{,}4544$. Dazu gehört eine Zahl $2{,}85 = S_2 : S_1$. Mithin wird $S_2 = 2850$ kg; die Seilreibung beträgt 1850 kg, ist daher sehr gross. Diese Vorrichtung eignet sich daher nicht als Aufzugsmaschine, um so besser aber zum Hinablassen einer Last, wobei die Reibung günstig wirkt. Beim Hinablassen wirkt die kleinere Kraft S_1 auf der linken Seite, während die Last jetzt $S_2 = 1000$ kg wird. Wiederum ist $e^{f\alpha} = 2{,}85$, daher $S_1 = 1000 : 2{,}85 = 351$ kg. Jetzt kommt also die Seilreibung im Betrage von $1000 - 351 = 649$ kg der hinablassenden Kraft zu Hülfe. Die Zugkraft an der linken Seite darf zwischen den weiten Grenzen 351 und 2850 kg sich bewegen, ohne dass ein vorhandener Ruhezustand gestört werden würde. Da die Reibung das Bestreben hat, den Balken zu drehen, so muss er hiergegen sicher befestigt sein.

Zum Festhalten oder bequemen Hinablassen schwerer Lasten findet eine derartige Vorrichtung vielfache Anwendung. Die Reibung wird noch bedeutend vergrössert, wenn man den Winkel α des umspannten Bogens vergrössert. Man kann dadurch jedes beliebige Verhältnis $S_2 : S_1$ erreichen. Wir wollen berechnen, wie gross α werden muss, wenn $S_2 : S_1 = 1000$ sein soll, d. h. wenn man durch Anwendung von $S_1 = 1$ kg die Last von 1000 kg hinablassen will. Es muss $e^{1/3\,\alpha} = 1000$, d. h. in Logarithmen $1/3\,\alpha\, 0{,}434 = 3$, oder $\alpha = 9 : 0{,}434 = 20{,}7$ sein. Da nun 1 Umwickelung einem Winkel 2π entspricht, so muss die Zahl der Umwickelungen $n = 20{,}7 : 2\pi = 3{,}3$ betragen. Wenn man also das Seil 3 Mal und dann noch 1/3 oder vielleicht 1/2 Mal umlegt, so wird das Ziel erreicht sein. Bei öfterem Umschlagen genügt schliesslich das Gewicht des überhängenden Seilendes zum Festhalten der Last.

Es ist für die Wirkung gleichgültig, ob der umspannte Bogen α sich auf einem Cylinder befindet, oder ob das Seil nach einander um mehrere Cylinder geschlungen ist; in letzterem Falle ist α die Summe der umspannten Bögen. Auf diesem Grundgedanken beruhen die Rettungsvorrichtungen bei Feuersgefahr, mittels deren Menschen aus einem brennenden Hause hinabgelassen werden können.

Fig. 292.



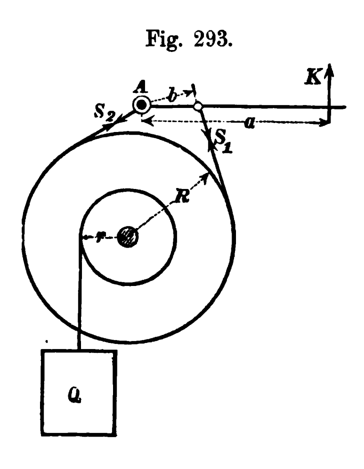
Erheblich vergrössert wird die Seilreibung noch, wenn man das (runde) Seil in eine Keilrinne (Fig. 292) legt, weil dann $f : \sin\delta$ an Stelle von f zu setzen ist.

g) Bandbremse.

Ein dünnes Bandeisen, welches man um einen Cylinder spannt, um an diesem Reibungswiderstand zu erzeugen, heisst Bremsband und findet als Bandbremse bei Winden vielfache Anwendung zum gleichmässigen Hinablassen von Lasten. An einer Windetrommel

vom Halbmesser r (Fig. 293) hänge das Gewicht Q. Mit der Trommel fest verbunden ist die Bremsscheibe vom Halbmesser R. Das umgelegte Bremsband sei mit dem einen Ende am Gestelle befestigt, z. B. an dem Drehpunkte A des Bremshebels, das andere Ende des Bandes sei mit dem Hebel verbunden. Am Ende des Hebels wirke aufwärts die Kraft K, welche in dem Bande eine Spannkraft S_1 auf der rechten Seite hervorruft. Bei der Drehung links herum entsteht an der Scheibe eine der Drehung entgegen wirkende Bandreibung $S_2 - S_1 = S_1\,(e^{f\alpha} - 1)$, welche, mit R multiplicirt, dem Momente Qr der Last gleich sein muss. Ist nun b der Hebelarm von S_1 (aber nicht als Länge am Hebel, sondern rechtwinklig zu S_1 gemessen), so wird $Ka = S_1 b$,

Fig. 293.



mithin $K = \frac{Q}{e^{f\alpha} - 1}\,\frac{r}{R}\,\frac{b}{a}$.

Beispiel: Der Winkel des umspannten Bogens sei $\alpha = 0{,}7 \cdot 2\pi$, die Reibungsziffer für Bandeisen auf gusseiserner Scheibe $f = 0{,}18$, $r : R = 1/2$, $a : b = 10$; dann wird $e^{\alpha f} = 2{,}21$ und

$$K = \frac{Q}{2{,}21 - 1}\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{10} = \frac{Q}{24{,}2},$$

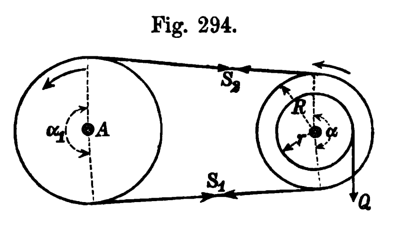
d. h. mit einer Kraft $K = 10^{\text{kg}}$ kann man eine Last $Q = 242^{\text{kg}}$ hinablassen.

Es ist räthlich, von den beiden Kräften des Bandes die kleinere S_1 auf den Hebel wirken, die grössere S_2 aber vom festen Gestell aufnehmen zu lassen.

h) Riemenscheiben.

Nützliche Anwendung findet die Seilreibung auch bei den Riemenscheiben, welche zur Übertragung der Bewegung von einer Welle auf eine ihr parallele Welle dienen, wenn die Entfernung der Wellen so gross ist, dass eine unmittelbare Übertragung mittels Reibungsräder oder Zahnräder nicht zweckmässig erscheint (Fig. 294). Der biegsame

Fig. 294.



Körper, der um die Umfänge der Scheiben gelegt wird, ist hier meist ein Lederriemen. Die Welle A drehe sich links herum; der Riemen sei genügend angespannt, so dass er auf den Scheiben nicht gleitet, dass vielmehr beide Scheibenumfänge und der Riemen die übereinstimmende Geschwindigkeit v haben müssen. Der Drehung der rechtsseitigen Welle setze sich ein Widerstandsmoment entgegen, welches wir wieder auf die Form $\mathfrak{M} = Q r$ bringen wollen (vergl. S. 231). Sind S_2 und S_1 die Spannkräfte der Riementheile, so wird die ganze Seilreibung an der rechtsseitigen Scheibe stets gemessen durch $S_2 - S_1$, und für gleichmässige Drehung der rechtsseitigen Welle ist erforderlich

$$1)\qquad S_2 - S_1 = Q r : R.$$

Da nun Riemen und Scheibe nicht auf einander gleiten, so ist

$$2)\qquad S_2 - S_1 = \leqq S_1 \left(e^{f\alpha} - 1\right),$$

oder durch Verbindung von Gl. 1 und 2:

$$S_1 = \geqq Q \frac{r}{R} \frac{1}{e^{f\alpha} - 1},$$ wofür wir schreiben wollen:

$$3)\qquad S_1 = Q \frac{r}{R} \frac{1}{e^{f\alpha} - 1} + \varDelta S;$$

darin ist $\varDelta S$ der Überschuss an Spannkraft, welche wegen der Sicherheit gegen Gleiten nöthig ist, dessen Grösse aber nur durch Erfahrung bedingt wird. Aus Gl. 3 und 1 wird dann

$$S_2 = S_1 + \frac{Q r}{R} = \frac{Q r}{R} \left(\frac{1}{e^{f\alpha} - 1} + 1\right) + \varDelta S \text{ oder}$$

$$4)\qquad S_2 = \frac{Q r}{R} \frac{e^{f\alpha}}{e^{f\alpha} - 1} + \varDelta S.$$

Die Grösse α des Winkels des umspannten Bogens wirkt in günstigem Sinne auf die Verhinderung des Gleitens. Da nun die gleichen Kräfte S_1 und S_2 an beiden Scheiben wirken, die Winkel α und α_1 aber bei beiden Scheiben im Allgemeinen ungleich sind, so muss von den beiden Winkeln α und α_1 stets der kleinere in Rechnung geführt werden.

Beispiel: Für Lederriemen auf Gusseisenscheiben setzt man $f = 0{,}28$, sind ferner die beiden Scheiben gleich und daher $\alpha = \pi$, so wird

$$e^{f\alpha} = e^{0{,}28\,\pi} = 2{,}41.$$

Ist nun $R = 0{,}6^{\,\mathrm{m}}$, $\mathfrak{M} = 100 \cdot 0{,}2 = 20^{\,\mathrm{mkg}}$, so wird

$$S_1 = \frac{20}{0{,}6}\,\frac{1}{1{,}41} + \varDelta S = 23{,}64^{\,\mathrm{kg}} + \varDelta S.$$

$$S_2 = 23{,}64 \cdot 2{,}41 + \varDelta S = 56{,}97^{\,\mathrm{kg}} + \varDelta S.$$

Wie bei den Reibungsrädern der Druck D, so verursachen hier die Spannkräfte S_1 und S_2 Zapfenreibungswiderstände in den Lagern. In ähnlicher Weise wie dort D, können hier S_1 und S_2 vermindert werden, wenn man den Riemen durch eine runde Schnur ersetzt und die Scheibe mit einer keilförmigen Rinne versieht (Fig. 295), so dass in Folge der Keilwirkung wiederum f mit $f : \sin\delta$ zu vertauschen ist. Man wähle δ so gross, dass das Seil sich in der Rinne nicht festklemmt, mache also $\delta > \varphi$, damit das Seil beim Ablaufen sich ohne erheblichen Widerstand aus der Rinne entfernt, nicht aber gewaltsam herausgezerrt werden muss.

Fig. 295.

Ist für Hanfseile in gusseisernen Rinnen $f = {}^1/_3$, $\varphi = 18^{\,0}$, so ist $\delta = 30^{\,0}$ zulässig.

In den vorstehenden Rechnungen ist der Einfluss der Geschwindigkeit des Riemens auf Verminderung der Reibung nicht berücksichtigt. Für schnelllaufende Riemen ist an Stelle der Gl. 2 auf S. 233 zu setzen (nach Gl. 4, S. 234)

$$\left(S_1 - \frac{\gamma}{g} F r^2 \omega^2\right)\left(e^{f\alpha} - 1\right) \geqq S_2 - S_1 = Q\,\frac{r}{R}.$$

Dadurch kommt dann zu den Werthen S_1 und S_2 nach Gl. 3 und 4, S. 237 noch der Summand $\frac{\gamma}{g} F r^2 \omega^2$ hinzu.

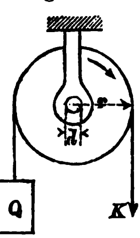
Hat z. B. ein Riemen von $0{,}5 \times 6^{\,\mathrm{cm}} = 3^{\,\mathrm{qcm}} = 0{,}0003^{\,\mathrm{qm}}$ Querschnitt eine Dichte von 900, so ist $\gamma F = 0{,}27$. Bei $15^{\,\mathrm{m}}$ sekundl. Umfangsgeschwindigkeit wird dann $\frac{\gamma}{g} F r^2 \omega^2 = \frac{0{,}27 \cdot 15^2}{9{,}81} = 6{,}2^{\,\mathrm{kg}}$. Aus den Zahlen des vorstehenden Beispiels wird dann $S_1 = 23{,}64 + 6{,}2 + \varDelta S$ und $S_2 = 57{,}37 + 6{,}2 + \varDelta S$.

i) Seilrollen und Flaschenzüge.

Ist über eine Rolle (Fig. 296) ein völlig biegsamer Faden gelegt, der die Last Q trägt, so würde, wenn sich der Drehung der Rolle kein Widerstand entgegensetzte, zur gleichmässigen Drehung kein Moment, also auch keine Seilreibung erforderlich sein, es

würde dann $K = Q$ hinreichen zum Hinaufziehen der Last. Nun findet aber ein Zapfendruck $D = Q + K$ statt, also ein Reibungsmoment $\mathfrak{M} = Df\frac{d}{2}$, wenn d der Zapfendurchmesser, zu dessen Überwindung eine am Umfange der Rolle angreifende Kraft $\frac{\mathfrak{M}}{r} = Df\frac{d}{2r} = \frac{Q+K}{2r}fd$ nöthig ist Dies ist die auf den Rollenumfang bezogene Zapfenreibung Z. Diese Kraft kann von dem Seile nur durch die Seilreibung auf die Rolle übertragen werden, oder es ist $K - Q = \frac{K+Q}{2r}fd$. Daraus entsteht

Fig. 296.



$$\frac{K}{Q} = \frac{1 + \frac{fd}{2r}}{1 - f\frac{d}{2r}}.$$

Zur Vereinfachung multipliciren wir in Zähler und Nenner mit dem Zähler, erhalten

$$\frac{K}{Q} = \frac{1 + f\frac{d}{r} + \left(\frac{fd}{2r}\right)^2}{1 - \left(\frac{fd}{2r}\right)^2}$$

und vernachlässigen nun den kleinen Werth $\left(\frac{fd}{2r}\right)^2$ gegen die Einheit, so dass genau genug

1) $$\frac{K}{Q} = 1 + f\frac{d}{r} \quad \text{wird.}$$

Man kann auch schreiben $K = Q + Z$, wo

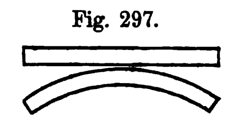
2) $$Z = Qf\frac{d}{r}$$

die auf den Rollenumfang bezogene Zapfenreibung, d. h. man kann (nach A. Ritter, Lehrbuch der technischen Mechanik, 2. Aufl., S. 365) die Sache so ansehen, als ob zu der Kraft $K_0 = Q$, die bei einer ideellen Rolle hinreichen würde, noch der Betrag Z hinzutreten muss.

Ausser der Zapfenreibung muss aber auch noch der Seilbiegungswiderstand berücksichtigt werden. Wir haben bisher ein Seil angenommen, dessen Richtung stets mit der Richtung seiner

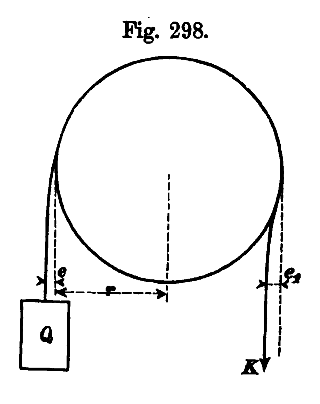
Spannkraft übereinstimmt, welches daher zu beiden Seiten der Rolle sich völlig tangential an diese legt. Wird aber ein wirkliches Seil aus der geraden Form in eine Krümmung übergeführt (Fig. 297), so müssen wegen der Längenverschiedenheit am inneren und äusseren Umfange die einzelnen Fasern, aus denen das Seil besteht, sich gegen einander verschieben, und dieser Verschiebung setzt sich ein Widerstand entgegen. Auch beim Übergange aus dem gekrümmten Zustande in den geraden ergeben sich die gleichen Widerstände.

Fig. 297.



Soll nun an der linken Seite der Rolle die Last Q aufgewunden werden, so geht das Seil nicht plötzlich aus der geraden Tangente in die Krümmung $1 : r$ über, sondern es vertheilt diese Krümmungsänderung auf eine gewisse Länge, und die Folge davon ist, dass die Mittellinie des unteren Theils des Seiles um eine gewisse Grösse e von der Tangente nach aussen abweicht (Fig. 298). Auf der Ablaufseite erfolgt der Übergang aus der Krümmung $1:r$ in die Krümmung Null ebenfalls allmählich mittels einer Gegenkrümmung, und es folgt daraus eine Abweichung der Kraft K von der Tangente um die Grösse e_1 nach innen. Die Biegungswiderstände haben dann dieselbe Einwirkung auf die Drehung der Rolle, als ob die Last Q an dem grösseren Hebelarm $r + e$, die treibende Kraft K aber an dem kleineren Hebelarm $r - e_1$ angreift, wobei man die Abstände e und e_1 gleich annehmen darf, daher wird

Fig. 298.



$$K(r - e) = Q(r + e) \quad \text{oder}$$

$$\frac{K}{Q} = \frac{r + e}{r - e} = \frac{1 + \frac{e}{r}}{1 - \frac{e}{r}},$$

wofür man, weil $e : r$ wieder ein kleiner Werth ist, schreiben kann (vergl. S. 239)

$$\frac{K}{Q} = 1 + \frac{2e}{r}.$$

Nennt man $Q \cdot 2\,e : r = B$ den auf den Rollenumfang bezogenen Biegungswiderstand, so kann man den Einfluss dieses Umstandes wieder so auffassen, als ob zu $K_0 = Q$ wegen der unvollkommenen Biegsamkeit noch der Betrag B hinzutreten muss.

Die Grösse e in Metern ist von der Dicke und Beschaffenheit des Seiles abhängig. Nach Versuchen ist für Hanfseile von der Dicke δ (in Metern)

$$3)\qquad e = 6{,}5\,\delta^2, \text{ oder } B = Q\frac{13\,\delta^2}{r}.$$

Werden nun durch die Wirkung der Zugkraft K bei gleichförmiger Drehung der Rolle Zapfenreibung und Biegungswiderstand zugleich überwunden, so kann man

$$4)\qquad K = Q + Z + B = Q\left(1 + f\frac{d}{r} + \frac{13\,\delta^2}{r}\right) \text{ setzen, oder}$$

$$5)\qquad K = Q\,w,$$

wenn $w = 1 + f\frac{d}{r} + \frac{13\,\delta^2}{r}$ ist; w heisst dann die **Widerstandsziffer** für Seilrollen.

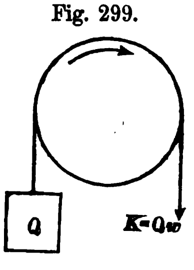


Fig. 299.

Ist die Seildicke $\delta = 0{,}02^{\,m}$, der Rollenhalbmesser $r = 0{,}09^{\,m}$, der Zapfendurchmesser $d = 0{,}03^{\,m}$, $f = 0{,}12$, so wird

$$w = 1 + \frac{0{,}12 \cdot 0{,}03}{0{,}09} + \frac{13 \cdot 0{,}0004}{0{,}09} = 1 + 0{,}04 + 0{,}06 = 1{,}10.$$

Die Zapfenreibung vergrössert also die erforderliche Zugkraft um 4 %, der Biegungswiderstand um 6 %; der Abstand der Seilmitte von der Tangente beträgt $e = 6{,}5 \cdot 0{,}0004 = 0{,}0026^{\,m} = 2{,}6^{\,mm}$.

Um eine Last von $100^{\,kg}$ mittels einer solchen Rolle und eines solchen Seiles gleichmässig emporzuziehen, ist eine Kraft $K = 110^{\,kg}$ erforderlich (Fig. 299). Beim Hinablassen der Last vertauschen Q und K ihre Rollen; das Verhältnis beider bleibt aber w, daher wird dann

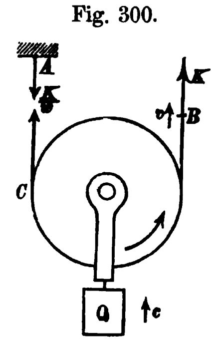
$$K = Q : w = 100 : 1{,}1 = 90{,}9^{\,kg}.$$

Bei einem über eine Rolle geführten Seil ist die Spannkraft in dem sich **abwickelnden** Seilstücke die grössere; das Verhältnis beider Spannkräfte beträgt stets w.

Streng genommen muss für jede gegebene Rolle mit Seil der Ausdruck w besonders berechnet werden. Da die Verhältnisse zwischen d, r und δ aber meist nicht sehr schwanken, wollen wir für fernere Beispiele mit Seilrollen $w = 1{,}1$ wählen.

Lose Rolle. Bei der sog. losen Rolle ist die Drehachse nicht fest gelagert; vielmehr ist das eine Ende des Seiles bei A (Fig. 300) befestigt; an dem anderen wird bei B gezogen, und die Last hängt an der Achse der Rolle. Beim gleichmässigen Aufwärtsziehen erfährt die Rolle eine aufwärts gerichtete Verschiebung mit der Geschwindigkeit c, welche sich mit der Umfangsgeschwindigkeit $r\omega$ im Punkte C derartig vereinigt, dass dort die Geschwindigkeit Null entsteht. Denn das Seil AC ruht, und da es auf der Rolle nicht gleitet, so muss auch der Punkt C der Rolle die Geschwindigkeit Null haben. Mithin ist $c = r\omega$. An der rechten Seite der Rolle addiren sich c und $r\omega$ zu der Geschwindigkeit $v = c + r\omega = 2c$, mit welcher der Punkt B des Seiles sich aufwärts bewegen muss. Die lose Rolle wälzt sich an dem Seile AC empor; die Bewegung ist eine Rollbewegung, bei der die einzelnen Punkte der Rolle Cykloiden beschreiben.

Fig. 300.



Das Verhältnis der Spannkräfte des Seiles muss wieder w betragen; ist also rechts im ablaufenden Stücke die Spannkraft K, so muss sie links $K : w$ sein. Nach S. 219 müssen auch bei dieser zusammengesetzten Bewegung die Kräfte K und $K : w$ der Last Q das Gleichgewicht halten. Mithin wird

$$Q = K\left(1 + \frac{1}{w}\right) = K(1 + 0{,}91) = 1{,}91\, K.$$

Für eine ideelle Rolle ohne Widerstände ist $w = 1$, mithin $Q = 2\,K_0$. Der Wirkungsgrad ist, weil $v = 2c$:

$$\eta = \frac{Qc}{Kv} = \frac{Q}{2\,K} = \frac{2\,K_0}{2\,K} = \frac{K_0}{K} = \frac{1{,}91}{2} = 0{,}955.$$

Flaschenzug. Ein Achsgestell mit einer oder mehreren Rollen heisst Klobenzeug oder kurzweg Kloben — auch eine Flasche (weil früher die Form der Kloben mit einer Flasche einige Ähnlichkeit hatte). Aus einer durch ein umgeschlungenes Seil oder Kette hergestellten Verbindung von festen und losen Kloben besteht der Flaschenzug. Sind mehrere Rollen in einem Kloben angeordnet, so bringt man diese jetzt meistens auf dieselbe Achse. In der Fig. 301 sind aber der Deutlichkeit wegen die Rollen unter einander gezeichnet.

Die in Wirklichkeit gleichen Rollen zeigen hier etwas verschiedene Grösse. Die Zahl der Rollen in jedem Kloben beträgt in der Zeichnung 2, allgemein sei sie n. Der obere Kloben ist in den Deckbalken befestigt, an dem unteren Kloben hängt die Last Q.

Fig. 301.

Beim Aufwinden drehen sich (Fig. 301) sämmtliche Rollen links herum. Die bei B angreifende Kraft sei K, dann ist die Spannkraft in dem rechtsseitigen Seilstücke $K:w$, sie vermindert sich nach dem Übergange über die Rollen schrittweise auf $K:w^2$, $K:w^3$ und $K:w^4$. Das Verhältnis $v:c$ ist offenbar gleich der Zahl der Seilstücke, an denen der untere Kloben hängt, also 4 oder allgemein $2n$. Die Seile werden als sämmtlich lothrecht angenommen, da die geringen Abweichungen keine Bedeutung haben. Rückt die Last um c aufwärts, so verkürzen sich die Seilstücke je um c, zusammen also um $4c$ bezw. $2nc$. Die gleiche Länge $v = 4c$ bezw. $v = 2nc$ muss daher bei B abwärts gezogen sein. Macht man durch einen Schnitt zwischen beiden Kloben den unteren frei, so verlangt dessen Gleichgewicht, dass die Last Q gleich der Summe der Kräfte der durchschnittenen Seile. Ohne Widerstände wären die Seilkräfte durchweg K_0, daher $Q = 4K_0$ bezw. $= 2nK_0$, mithin ist wieder $v:c = Q:K_0$.

In Wirklichkeit ist

$$Q = K\left(\frac{1}{w} + \frac{1}{w^2} + \frac{1}{w^3} + \frac{1}{w^4}\right) = \frac{K}{w^4}(w^3 + w^2 + w + 1)$$

$$= \frac{K}{w^4}\,\frac{w^4 - 1}{w - 1} \quad \text{und ebenso allgemein} \tag{6}$$

$$Q = \frac{K}{w^{2n}}\,\frac{w^{2n} - 1}{w - 1}; \quad \text{mithin} \tag{7}$$

$$\eta = \frac{Qc}{Kv} = \frac{w^{2n} - 1}{2n \cdot w^{2n}(w - 1)}. \tag{8}$$

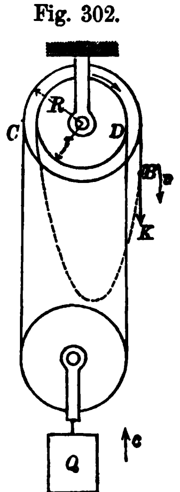
Beispiel: Es sei wieder $w = 1{,}1$, dann wird
für $n = 2 : Q = 3{,}16\,K$, $\eta = 0{,}79$,
für $n = 4 : Q = 5{,}34\,K$, $\eta = 0{,}67$.
Im ersten Falle werden 79 % der aufgewendeten Arbeit nützlich verwerthet, im zweiten nur 67 %, während 21 bezw. 33 % verloren gehen. Mit wachsender

Rollenzahl nimmt also der Wirkungsgrad ab. Es ist daher besser, eine schwere Last an 2 Flaschenzügen zu je 4 Rollen aufzuwinden, als an 1 Flaschenzuge mit 8 Rollen.

Für das Hinablassen der Last ist durchweg w mit $1 : w$ zu vertauschen.

Differenz-Flaschenzug. Der Differenz-Flaschenzug (Fig. 302) gestattet, mit nur 3 Rollen ein bedeutendes Übersetzungsverhältnis $v : c$ zu erreichen. Die beiden Rollen des oberen Klobens bilden zusammen ein Stück, haben daher gleichen Drehungswinkel. Statt eines Seiles dient eine Kette. Wird bei B eine Kettenlänge v abwärts gezogen, so findet bei C ein Aufwärtswinden um v, bei D ein Abwärtswinden um $vr : R$, also zusammen eine Verkürzung der Kette zwischen beiden Kloben um $v\left(1 - \frac{r}{R}\right)$ statt; da sich diese auf 2 Stücke vertheilt, so hebt sich der untere Kloben um $c = \frac{v}{2}\left(1 - \frac{r}{R}\right)$, mithin ist

Fig. 302.



$$9) \qquad v : c = \frac{2}{1 - \frac{r}{R}}.$$

Der Name des Flaschenzuges erklärt sich daraus, dass das Heben in Folge der Differenz zwischen Aufwinden und Abwinden zu Stande kommt.

Ohne Widerstände würde in jedem Kettenstücke des unteren Klobens eine Kraft $\frac{1}{2} Q$ herrschen; dann ergiebt (wenn K_0 die ideelle Triebkraft) die Momentengleichung des oberen Klobens $0 = K_0 R + \frac{1}{2} Q r - \frac{1}{2} Q R$ oder $K_0 R = \frac{1}{2} Q (R - r)$, d. h.

$$10) \qquad Q : K_0 = 2 : (1 - r : R) = v : c.$$

Macht man z. B. $r : R = 14 : 15$, so wird $Q : K_0 = v : c = 30$.

An der linken Seite der kleineren Rolle des oberen Klobens ist die Kette ohne Spannkraft, während auf der rechten Seite eine Spannkraft $= \frac{1}{2} Q$ herrscht; ebenso ist der Unterschied der Spannkräfte der grossen Rolle ein so erheblicher, dass die Seilreibung nicht genügen würde, um ein Gleiten zu verhindern. Aus diesem Grunde hat man statt des Seiles eine Kette gewählt, die zwischen zahnartige seitliche Vorsprünge der oberen Rollenkörper (Fig. 303) eingreift und

Fig. 303.

dadurch ein Gleiten unmöglich macht. Eine solche Kette hat nur geringe Steifigkeit, weshalb man die Widerstandsziffer der Kettenrolle zu $w = 1{,}05$ annehmen kann.

Fig. 304.

Betrachtet man die Verhältnisse annäherungsweise so, als ob der Widerstand ganz allein von der Zapfenreibung gebildet würde, so wäre nach Gleichung 4, S. 241

$$11)\qquad w = 1 + f\frac{d}{R},$$

An der unteren Rolle wirken Kettenkräfte S und Sw (Fig. 304), und es ist

$$Q = S(1 + w).$$

An der oberen Rolle tritt ein Zapfendruck auf, der annähernd gleich Q, da K nur ziemlich klein ist. Dadurch entsteht ein Zapfenreibungsmoment $\frac{1}{2}Qfd$. Die Momentengleichung für den oberen Rollenkörper lautet:

$$0 = KR + Sr - SwR - \tfrac{1}{2}Qfd.$$

Daraus wird
$$K = S\left(w - \frac{r}{R}\right) + Qf\frac{d}{2R}$$
$$= \frac{Q}{1+w}\left(w - \frac{r}{R}\right) + Qf\frac{d}{2R} \quad \text{oder,}$$

$$12)\qquad \text{weil } f\frac{d}{R} = w - 1 \quad \text{(Gl. 11)},$$
$$K = \frac{Q}{1+w}\left(w - \frac{r}{R} + \frac{w^2-1}{2}\right).$$

Es ist aber $w + \dfrac{w^2-1}{2} = w^2 - \dfrac{w^2-2w+1}{2} = w^2 - \dfrac{(w-1)^2}{2}$.

Da nun $w^2 = 1{,}05^2 = 1{,}1$, $(w-1)^2$ aber nur $= 0{,}0025$, so ist $\dfrac{(w-1)^2}{2}$ gegen w^2 zu vernachlässigen, daher annähernd

$$13)\qquad K = \frac{Q}{1+w}\left(w^2 - \frac{r}{R}\right) \quad \text{zu schreiben.}$$

Für gleichmässiges Hinablassen ist w durch $1 : w$ zu ersetzen; es wird dann an Stelle von K die Kraft K_1 nöthig mit

$$14)\qquad K_1 = \frac{Q}{1+\dfrac{1}{w}}\left(\frac{1}{w^2} - \frac{r}{R}\right).$$

Da nun $1 : w^2$ ein echter Bruch und $r : R$ ebenfalls, so könnte man $r : R$ beispielsweise $= 1 : w^2$ wählen. Dann wird $K_1 = 0$, d. h. die Last geht gleichmässig abwärts, ohne dass eine hemmende Kraft K_1 nöthig ist, oder die Last Q wird durch die Widerstände eben im Gleichgewichte gehalten. Unter diesen Verhältnissen ($r : R = 1 : w^2$) wird für Aufwinden

$$K = Q \frac{\left(w^2 - \frac{1}{w^2}\right)}{1 + w} = \frac{0{,}2}{2{,}05} Q,$$

ohne Widerstände aber

$$K_0 = Q \frac{\left(1 - \frac{1}{w^2}\right)}{2} = \frac{0{,}1}{2} Q,$$

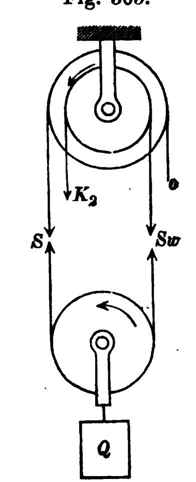
mithin ist der Wirkungsgrad $\eta = \frac{0{,}1 \cdot 2{,}05}{2 \quad 0{,}2} = 0{,}51$, also (in Übereinstimmung mit S. 216) nahezu gleich $^1/_2$.

Soll der Flaschenzug sich aber mit Sicherheit bremsen, so muss rechnungsmässig $K_1 < 0$, d. h. $1 : w^2 < r : R$, oder

15) $$r : R > 1 : w^2 \text{ sein.}$$

Diese Eigenschaft der Selbstsperrung wird bei dem Differenz-Flaschenzuge gewünscht. Weil nun ein negativer Zug K_1 an der Kette nicht ausgeübt werden kann, so muss die Drehung linksherum durch einen Zug K_2 an dem bisher nicht benutzten Kettenstücke bewirkt werden (Fig. 305). Da der Zapfendruck am oberen Zapfen wieder annähernd Q beträgt, das Reibungsmoment daher $Qf\,^1/_2\,d$, so lautet die Momentengleichung der oberen Rolle

Fig. 305.



$$K_2 r + SR = Swr + Qf\,^1/_2\,d.$$

Wegen des geringen Unterschiedes zwischen r und R kann aber $fd = (w - 1)R$ (Gl. 12) annähernd auch $= (w - 1)r$ gesetzt werden, so dass

$$K_2 = S\left(w - \frac{R}{r}\right) + Q\frac{(w-1)}{2} \text{ wird,}$$

oder, weil wieder $Q = S(1 + w)$

$$K_2 = \frac{Q}{1+w}\left(w - \frac{R}{r}\right) + \frac{Q}{2}(w - 1) = \frac{Q}{1+w}\left(w - \frac{R}{r} + \frac{w^2 - 1}{2}\right).$$

Es ist aber wieder $w + \frac{w^2 - 1}{2} = w^2 - \frac{(w-1)^2}{2}$ oder annähernd $= w^2$, mithin

16) $$K_2 = \frac{Q}{1+w}\left(w^2 - \frac{R}{r}\right),$$

was für $w^2 > R : r$ (Gl. 15) positiv wird.

Beispiel: Für $w = 1{,}05$ ist $w^2 = 1{,}1$, $1 : w^2 = 0{,}909$. Wählt man nun $r : R = 14 : 15$, so ist $\frac{14}{15} = 0{,}93 > 0{,}909$, d. h. die Bedingung (15) der Selbstsperrung erfüllt. Es ist ferner (nach Gl. 10) $v : c = 30 = Q : K_0$. Für das Aufwinden wird (nach Gl. 13) $K = \frac{Q}{2{,}05}\left(1{,}1 - \frac{14}{15}\right) = \frac{Q}{12{,}1}$. Da nun $K_0 = \frac{Q}{30}$, so ist

$$\eta = \frac{12{,}1}{30} = 0{,}40.$$

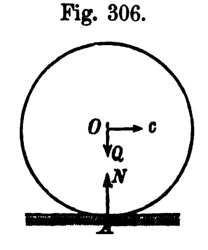
Zum Hinabwinden ist die Kraft $K_2 = \frac{Q}{2{,}05}\left(1{,}1 - \frac{15}{14}\right) = \frac{Q}{71}$ aufzuwenden. Also mit Aufwand von $K = 10$ kg kann man $Q = 121$ kg heben, während zum Hinabwinden $K_2 = 1{,}7$ kg hinreicht.

Der Differenz-Flaschenzug ist offenbar keine vortheilhafte Aufzugsmaschine, da sein Wirkungsgrad nur 0,4 beträgt. Angenehm sind aber seine Einfachheit und die Bequemlichkeit der Handhabung. Beim Einspannen einer schweren Achse in eine Drehbank oder beim Versetzen eines schweren Steines ist die Selbstsperrung sehr werthvoll. Der ihn handhabende Arbeiter braucht ihn nicht vorsichtig festzuhalten, sondern kann seine volle Aufmerksamkeit auf die genaue Einstellung der Last richten, indem er durch Ziehen an der einen oder anderen Kette die Last bald hebt, bald senkt, wie es erwünscht ist.

12. Rollwiderstand der Walzen und Räder. Gleichmässige Bewegung der Fuhrwerke.

Wird eine starre cylindrische Walze auf eine starre wagerechte Ebene gelegt, so findet die Berührung längs einer Cylinderseite statt (Fig. 306). Das Gewicht Q der Walze wird von dem Widerstande N der Ebene aufgehoben, und versetzt man die Walze in eine Rollbewegung, wobei die Geschwindigkeit c des Mittelpunktes O gleich der Umfangsgeschwindigkeit $r\omega$ der Drehbewegung ist, so ist an der Berührungsstelle A die Gesammtgeschwindigkeit $v = c - r\omega =$ Null, d. h. es findet kein Gleiten statt, und da die sonstigen Kräfte Q und N sich aufheben, so kommt keine Reibung

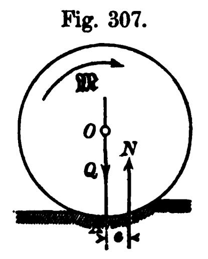
Fig. 306.



zur Wirkung. Daher sind die Bedingungen der gleichmässigen Drehbewegung und der gleichmässigen Verschiebung, mithin auch der gleichmässigen Rollbewegung erfüllt, d. h. es ist bei vollkommener Starrheit zur Unterhaltung der Rollbewegung keine weitere Kraft erforderlich.

Bei den wirklichen festen Körpern kann aber der Druck N nicht von einer Linie aufgenommen werden, sondern er vertheilt sich auf eine Fläche, indem sowohl die Walze wie die Unterlage ihre Form ändern, sich gegenseitig zusammendrücken. Diejenigen Theile der Bahn, welche die Walze schon überrollt hat, kehren in den meisten Fällen nicht ganz in den früheren Zustand zurück; sie sind um ein gewisses Mafs dauernd niedergewalzt. In Folge dessen liegt der vor der Walze befindliche Theil der Unterlage höher als der andere; der Druck N vertheilt sich nicht gleichmässig zu beiden Seiten der Walzenmitte, vielmehr überwiegt der Gegendruck auf der Vorderseite. Dadurch verschiebt sich dann der Gesammtdruck N nach vorn, sodass er nicht mehr mit Q zusammenfällt, sondern mit Q ein Kräftepaar Ne bildet, das Moment des Rollwiderstandes. Zur Unterhaltung der gleichmässigen Rollbewegung ist daher ein treibendes Moment

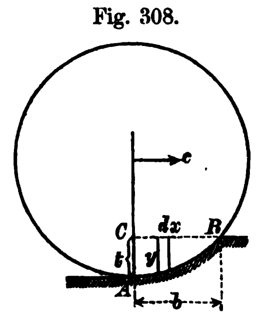
Fig. 307.



1) $\mathfrak{M} = Ne$ erforderlich.

Zur Beurtheilung der Vertheilung des Druckes N auf die Unterstützungsfläche darf man wohl für die meisten Fälle die vereinfachende Annahme machen, dass nur die Unterlage eine Formänderung erfährt, während die Walze ihre runde Form behält. Zuerst werde der Fall betrachtet, dass der von der Walze niedergedrückte Theil der Unterlage sich gar nicht wieder elastisch hinter ihr hebt, sondern niedergedrückt verbleibt (Fig. 308), wie es bei einem thonigen oder sandigen Wege etwa stattfinden wird. Den Gegendruck solcher Stoffe pflegt man mit der Eindrückungstiefe y verhältnisgleich zu nehmen. Ist ψ der Gegendruck der Längeneinheit der Horizontalprojektion für eine Tiefe gleich Eins, so hat er bei der Tiefe y den Werth ψy, und es ist dann der Gegendruck einer Breite dx: $\psi y dx$ und der gesammte Druck

Fig. 308.



$$N = \psi \int y\,dx = \psi \cdot ABC.$$

Selbstverständlich geht dann auch N durch den Schwerpunkt der Fläche ABC.

Weil nun AB in den wichtigeren Fällen ein kleiner Bogen, so kann er annähernd als ein Parabelstück vom Parameter r (= dem Halbmesser des Rollkreises) betrachtet werden. Dann wird, wenn b und t die beiden Projektionen von AB, $b^2 = 2rt$, $t = b^2 : (2r)$ und

2) $$N = \psi \cdot {}^2/_3\, b\, t = {}^1/_3\, \psi \frac{b^3}{r},$$

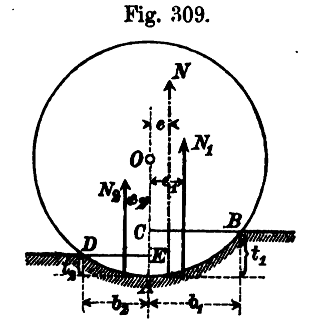
$$\text{daher} \quad b^3 = \frac{3Nr}{\psi}.$$

Der Abstand e der Kraft N von dem Mittelpunkte ist (S. 134)

3) $$e = {}^3/_8\, b = {}^3/_8 \sqrt[3]{\frac{3Nr}{\psi}}.$$

Ist die Unterlage aber nicht so vollkommen bildsam oder plastisch, dass jeder erzeugte Eindruck in voller Grösse bleibt; kann vielmehr ein gewisser Grad von Elasticität vorausgesetzt werden, so hebt sich die um die Tiefe t_1 eingedrückte Unterlage hinter der Walze um t_2 wieder empor (Fig. 309) und leistet dann entsprechende Gegendrücke.

Fig. 309.



Dann wird der Druck auf der Vorderseite

$$N_1 = \psi\, {}^2/_3\, b_1 t_1 = {}^1/_3\, \psi \frac{b_1^3}{r},$$

der auf der Rückseite

$$N_2 = {}^1/_3\, \psi \frac{b_2^3}{r}.$$

Ferner ist $b_1^3 = \dfrac{3N_1 r}{\psi}$; $b_2^3 = \dfrac{3N_2 r}{\psi}$.

4) Setzt man $b_1 = n b_2$,

so ist n von dem Grade der Elasticität der Unterlage abhängig. Dann kann man $N_2 = \dfrac{1}{3}\psi n^3 \dfrac{b_1^3}{r}$ schreiben. Somit wird der Gesammtdruck

5) $$N = N_1 + N_2 = \frac{1}{3}\psi \frac{b_1^3}{r}(1 + n^3) \quad \text{und}$$

6) $$b_1 = \sqrt[3]{\frac{3Nr}{\psi(1+n^3)}}.$$

Die Abstände der Kräfte N_1 und N_2 von dem Mittelpunkte O betragen $e_1 = {}^3/_8\, b_1$; $e_2 = {}^3/_8\, b_2 = {}^3/_8\, n b_1$. Für die Mittelkraft N gilt dann die Momentengleichung in Bezug auf O

$$-Ne = -N_1 e_1 + N_2 e_2 = -{}^3/_8\, b_1 (N_1 - nN_2),$$

daher wird, wenn man den gemeinschaftlichen Faktor ${}^1/_3\, \psi : r$ in allen Gliedern fortlässt,

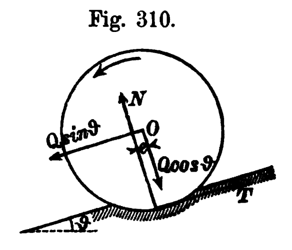
7) $$e = {}^3/_8\, b_1 \frac{1-n^4}{1+n^3} = {}^3/_8 \sqrt[3]{\frac{3Nr}{\psi(1+n)^3}}\, \frac{1-n^4}{1+n^3}.$$

Für $n = 0$ entsteht wieder der Werth der Gl. 3.

Hiernach ist e in verwickelter Weise von ψ und n, d. h. von der Beschaffenheit der Unterlage, oder, weil die Zusammendrückung in Wirklichkeit eine gegenseitige ist, von den Stoffen der Walze und der Unterlage abhängig, ausserdem aber auch von der Grösse des Druckes N und von dem Halbmesser r des Rollkreises. Hat man aber e für einen Werth von N und r durch unmittelbare Messung oder auf mittelbarem Wege gefunden, so bringt eine Änderung von N oder von r nur geringe Änderung von e hervor, da Nr schon auf das Achtfache wachsen muss, wenn e sich verdoppeln soll. Daher zieht man es vor, für eine Gruppe praktisch wichtiger Fälle bei Mittelwerthen von N und r die Grösse e ein Mal zu bestimmen und diese Länge e dann für andere ähnliche Fälle innerhalb gewisser Grenzen unverändert beizubehalten.

Die Ermittelung der Grösse e kann durch Versuche in ähnlicher Weise erfolgen, wie man die Reibungsziffer mittels der schiefen Ebene (S. 192) feststellt. Giebt man der Rollbahn eine veränderliche Neigung, legt die Walze auf und stellt durch Versuche denjenigen Neigungswinkel ϑ der Bahn fest, bei welchem sich eine gleichmässige Rollbewegung der Walze erhält, so lässt sich mittels dieses **Rollwinkels** ϑ die Grösse e berechnen (Fig. 310).

Fig. 310.



Das Gewicht Q der Walze zerlegt sich in $Q \sin\vartheta$ und $Q\cos\vartheta$. Der Druck N der Bahn geht um e an O vorbei. Ausserdem tritt nun noch die Reibung T an der Bahn auf. Diese 4 Kräfte müssen den Gewichtsbedingungen genügen, daher

$$N = Q\cos\vartheta; \quad T = Q\sin\vartheta.$$

Die beiden auftretenden Kräftepaare müssen sich aufheben, daher

$$Q\cos\vartheta\, e = Q\sin\vartheta\, r \quad \text{oder} \quad e = r\,\mathrm{tg}\,\vartheta,$$

wofür man wegen der Kleinheit des Winkels ϑ auch

$$8) \qquad e = r\vartheta$$

schreiben kann.

Für Walzen und Bahn aus nicht sehr hartem
Holze ist etwa . . . . $e = 0{,}001\,^{\mathrm{m}}$,
bei sehr hartem Holze . . . . $e = 0{,}0005\,^{\mathrm{m}}$,
bei Eisenbahnwagen-Rädern auf Schienen . $e = 0{,}0005\,^{\mathrm{m}}$.

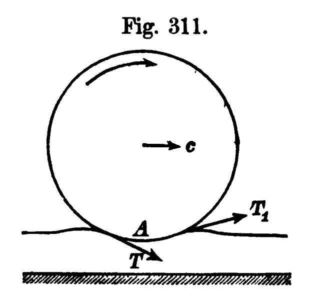
Danach beträgt der Rollwinkel im letzteren Falle, wenn $r = 0{,}5\,^{\mathrm{m}}$, $\vartheta = 0{,}0005 : 0{,}5 = 0{,}001 = 1 : 1000$, d. h. auf einem Gefälle von $1 : 1000$ kann eine Eisenbahnwagenachse durch ihr Gewicht gleichmässig rollen.

Nach den vorstehenden Betrachtungen würde der Rollwiderstand verschwinden, wenn die zusammendrückbare Fahrbahn sehr elastisch, annähernd $n = 1$ wäre, indem dann $e =$ Null entsteht. Man könnte glauben, dass eine Kaukschukplatte oder auch eine Unterlage von Stahl in solchem Maſse elastisch wäre, dass dafür nahezu $n = 1$ gesetzt werden müsste. Damit steht nun freilich die Erfahrung im Widerspruche, denn bei dem Rollen einer eisernen Walze auf einer Kaukschukplatte zeigt sich ein ziemlich erheblicher Widerstand, oder es ist eine ziemlich erhebliche Neigung ϑ erforderlich, damit ein gleichmässiges Rellen auf schiefer Ebene stattfinden kann.

Diese Erscheinung erklärt sich in folgender Weise. Wenn auch die Bahn von Kautschuk bezw. von Stahl so elastisch ist, dass nach einiger Zeit keine Spur des Hinüberrollens mehr bemerkt wird, so erfolgt die Rückkehr in die ursprüngliche Form niemals sofort, sie erfordert vielmehr immer eine gewisse Zeit. Daher wird die Oberfläche der Fahrbahn dicht hinter der Walze immer etwas tiefer liegen als vor derselben und erst später, wenn die Walze sich von der Stelle entfernt hat, zur ursprünglichen Höhe zurückkehren.

Auch ist die Rollbewegung nach Versuchen von Prof. Osborne Reynolds im Jahre 1875 (Philosophical transactions, Bd. 166; Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure 1877, S. 417) stets mit einem Gleiten verbunden. Die Strecke s, welche eine eiserne Walze vom Halbmesser r auf einer Kaukschukplatte bei einer Umdrehung zurücklegt, zeigt sich kleiner als der Umfangsweg $2\,r\,\pi$. Mit dem Zusammendrücken der Kautschukplatte ist vor und hinter der Zusammendrückung eine wulstartige Erhebung verbunden (Fig. 311). In der Nähe des Punktes A wird vielleicht kein Gleiten stattfinden, wohl aber zu beiden Seiten; aus dem Gleiten entstehen dann Reibungswiderstände T und T_1, die ein Widerstandsmoment liefern. Hiernach darf auch für elastische Bahnen die Formel 1 (S. 248) für den Rollwiderstand beibehalten werden, so lange eine bessere nicht gefunden ist.

Fig. 311.

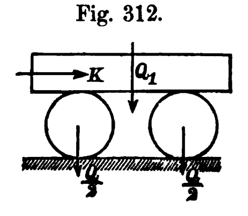


Wird eine Last Q_1 auf Walzen vom Gesammtgewichte Q fortgeschoben, so tritt unten wie oben an den Walzen ein Rollwiderstand auf; die erforderliche Kraft ist dann

$$9)\qquad K = \left\{Q_1 e + (Q + Q_1) e_1\right\} : (2\,r);$$

denn die Kraft K überträgt sich durch Reibung auf die oberen Theile der Walzen und bildet mit den unten an den Walzen auftretenden Reibungswiderständen ein Kräftepaar vom Hebelarme $2\,r$; e und e_1 sind die Arme der Rollwiderstände oben bezw. unten.

Fig. 312.



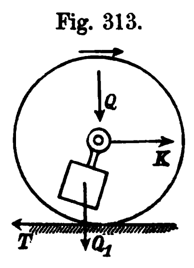
Sind alle in Frage kommenden Theile aus sehr hartem Holze, ist $Q_1 = 1000^{\text{kg}}$, $Q = 50^{\text{kg}}$, $r = 0{,}1^{\text{m}}$, so wird

$$K = \frac{1000 \cdot 0{,}0005 + 1050 \cdot 0{,}0005}{0{,}2} = 5{,}1^{\text{kg}}.$$

Hieraus erkennt man die Zweckmässigkeit der Walzen zum Fortschaffen schwerer Körper (eiserner oder steinerner Bautheile).

Bei den Fuhrwerken nun ist die Last des Wagenkastens mittels Achslager auf die Achsen der Räder gestützt, und da der Wagenkasten wohl an der Verschiebung, nicht aber an der Drehung der Walze theilnimmt, so findet an den Zapfen vom Durchmesser d eine Zapfenreibung statt. Wir wollen zunächst eine einzige Wagenachse von dem Gewichte Q betrachten und an ihr eine Last Q_1 aufgehängt denken (Fig. 313). (Das Gehänge stellt sich dann wegen des Zapfenreibungsmoments $\frac{1}{2} f Q_1 d$ etwas schief). Der Bodendruck beträgt $Q + Q_1$, daher das Moment des Rollwiderstandes $(Q + Q_1)e$. Die Zugkraft K auf wagerechter Ebene veranlasst, dass der Zapfendruck etwas grösser wird, doch hat dieser Umstand keine Bedeutung. An der Fahrbahn entsteht eine Reibung T, welche mit K das treibende Kräftepaar liefert: es ist dann mit R als Radhalbmesser:

Fig. 313.



$$KR = \tfrac{1}{2} Q_1 f d + (Q + Q_1)e, \quad \text{so dass}$$

$$10) \qquad K = \frac{\frac{1}{2} Q_1 f d + (Q + Q_1)e}{R} \quad \text{wird.}$$

Diese Formel bleibt auch gültig, wenn die Last des Wagenkastens Q_1 auf mehrere Achsen vom Gesammtgewichte Q vertheilt ist. Genauer bedeutet Q das Gewicht der rollenden, Q_1 das der der nur fortschreitenden Theile. Bei gewöhnlichen Strassenfuhrwerken bezieht sich Q nur auf die Räder, während die Achsen zu Q_1 gehören; bei den gewöhnlichen Eisenbahnfuhrwerken dagegen ist die Achse mit den Rädern fest verbunden, so dass Q das Gewicht der Achsen und Räder bedeutet.

Nach Gl. 10 steht die erforderliche Zugkraft K im umgekehrten Verhältnisse zu dem Radhalbmesser R; zur Verminderung von K muss man daher R so gross machen, wie die sonstigen Umstände und Rücksichten gestatten.

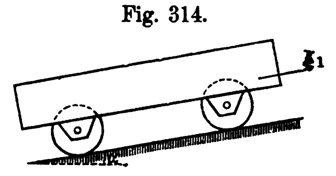
Beispiel: An einem zweiachsigen Eisenbahnwagen wiegen die beiden Achsen mit den Rädern $Q = 2000^{kg}$, die übrigen Theile nebst der Last $Q_1 = 8000^{kg}$; der Radhalbmesser sei $R = 0{,}5^{m}$, der Zapfendurchmesser $d = 0{,}1^{m}$, die Reibungsziffer $f = 0{,}02$, die Grösse $e = 0{,}0005^{m}$, dann ist die auf wagerechter gerader Bahn erforderliche Zugkraft

$$K = \frac{4000 \cdot 0{,}02 \cdot 0{,}1}{0{,}5} + 10000 \cdot \frac{0{,}0005}{0{,}5} = 16 + 10 = 26^{kg},$$

wovon 16^{kg} durch Zapfenreibung, 10^{kg} durch Rollwiderstand erfordert werden.

Soll das Fuhrwerk gleichmässig eine Steigung unter dem Winkel α hinan gezogen werden, so bleibt der ganze Zapfendruck $= Q_1$, der Normalwiderstand N beträgt aber nur $(Q_1 + Q) \cos \alpha$; doch ist $\cos \alpha$ bei allen Bahnen und Wegen, die frei (ohne Seil oder Zahnstange) befahren werden, von der Einheit so wenig verschieden, dass Zapfenreibung + Rollwiderstand wiederum $= K$ gesetzt werden können. Es tritt aber nun noch die schräg abwärts gerichtete Seitenkraft der Schwere $Q \sin \alpha$ und $Q_1 \sin \alpha$ auf, die beide von K_1 mit überwunden werden müssen. Daher ist die jetzt erforderliche Zugkraft

Fig. 314.



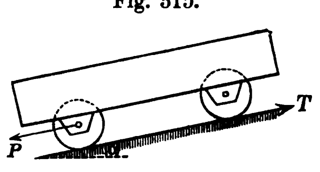
$$K_1 = (Q + Q_1) \sin \alpha + K, \tag{11}$$

worin aber α statt $\sin \alpha$ geschrieben werden kann.

Diese Kräfte K und K_1 müssten nach dem bisherigen (Fig. 313) eigentlich an den Mittellinien der Achsen angreifen. Bringt man sie aber in beliebiger Höhe an dem Fuhrwerke an, so wird durch diese Verschiebung nur die Vertheilung der Last Q_1 auf die beiden Achsen etwas geändert, im Übrigen bleibt die Wirkung die gleiche.

Bewegt sich das Fuhrwerk gleichmässig abwärts und wird auf dasselbe (etwa mittels eines Seiles) eine hemmende Kraft K_2 ausgeübt, so ist $(Q + Q_1)\,\alpha - K_2$ die gesammte treibende Kraft P mit dem Sinne abwärts (Fig. 315). Die Neigung α hat einen gewissen Einfluss auf die Vertheilung der Last Q_1 auf die beiden Achsen; davon abgesehen, kann man sich aber die gesammte Kraft P in der Achsenmitte angreifend denken. An den Berührungsstellen

Fig. 315.



der Räder mit der Bahn tritt eine gesammte Reibung $T = P$ auf und bildet mit P das Kräftepaar PR zur Überwindung der Widerstandsmomente $\frac{1}{2} Q_1 f d + (Q + Q_1) e$, und da letztere Summe $= KR$ (Gl. 10), so ist

$$(Q + Q_1) a - K_2 = K,$$

oder die erforderliche Hemmkraft

$$K_2 = (Q + Q_1) a - K. \tag{12}$$

Für ein gewisses Gefällverhältnis $a = a_0$ reicht $(Q + Q_1) a_0$ gerade zur Überwindung der Widerstände hin, so dass die erforderliche Hemmkraft $K_2 = 0$ wird. Dieses Gefälle heisst die **Gleichgewichtsneigung** a_0, u. zw. ist

$$a_0 = \frac{K}{Q + Q_1}. \tag{13}$$

Zugleich ist dann aber auch

$$K = (Q + Q_1) a_0, \tag{14}$$

d. h. die auf wagerechter Ebene erforderliche Zugkraft K gleich dem Gesammtgewichte $(Q + Q_1)$ mal der Gleichgewichtsneigung a_0.

Durch Vorrichtungen zur Messung der Zugkraft oder durch Ermittelung der Gleichgewichtsneigung kann die für einen Wagen erforderliche Zugkraft K ziemlich scharf gemessen werden; von den beiden Widerständen. aber, die von K überwunden werden, kann man nur die Zapfenreibung einigermassen befriedigend berechnen, während der Betrag des Rollwiderstandes bisher nur sehr unvollkommen berechnet werden kann, wie aus den Bemerkungen auf S. 251 ersichtlich ist. Man zieht es deshalb vor, nur den Gesammtwiderstand K durch Versuche eingehender zu prüfen und K in ein Verhältnis zu dem Gesammtgewichte $Q + Q_1$ des Fuhrwerks zu bringen, trotzdem nach Gl. 10 der Werth K nicht genau verhältnisgleich mit $Q + Q_1$ ist. Diese Verhältniszahl ist nach Gl. 14 aber die Gleichgewichtsneigung a_0. Mit deren Einführung wird dann auf einer Steigung a nach Gl. 11

$$K_1 = (Q + Q_1)(a + a_0), \tag{15}$$

auf einem Gefälle a nach Gl. 12 die Haltkraft

$$K_2 = (Q + Q_1)(a - a_0). \tag{16}$$

Auf Grund dieser Vereinfachungen bekommt nun die Gleichgewichtsneigung a_0 eine ähnliche Bedeutung, wie sie der Reibungs-

winkel φ bei gleitender Bewegung hat. Da bei Fuhrwerken α_0 stets ein kleiner Bruch, so ist $\sin \alpha_0 = \alpha_0 = \operatorname{tg} \alpha_0$ zu setzen, ebenso wie bei kleinem Reibungswinkel $\sin \varphi = \varphi = \operatorname{tg} \varphi = f$ gesetzt werden konnte. Die Gleichgewichtsneigung α_0 ist zugleich die **Widerstandsziffer** des Fuhrwerks, welche man nur mit dessen Gewicht zu multipliciren braucht, um den Gesammtwiderstand auf wagerechter Bahn zu erhalten. Man braucht daher zur zahlenmässigen Berechnung der erforderlichen Zug- oder Haltkräfte K_1 und K_2 auf die rollenden Räder und die damit zusammenhängenden Widerstände keine Rücksicht mehr zu nehmen, sondern kann, weil diese Widerstände in dem Werthe α_0 stecken, bei **gleichmässiger** Bewegung das Fuhrwerk wie einen Schlitten vom Gesammtgewichte $Q + Q_1$ auf sehr glatter Bahn mit einer Reibungsziffer $f = \alpha_0$ betrachten. Die Kraft $(Q + Q_1)\alpha_0$ ist dann stets entgegengesetzt der Bewegung, $(Q + Q_1)\alpha$ stets abwärts anzubringen.

Beispiel: Für den Eisenbahnwagen auf S. 253 ist $K = 26$, $Q + Q_1 = 10000$, daher $\alpha_0 = 0{,}0026 = 1 : 385$, wofür man $\alpha_0 = 0{,}0025 = 1 : 400$ zu setzen pflegt. Ein Zug aus 40 derartigen Wagen hat ein Gewicht $Q + Q_1 = 400000^{\text{kg}}$. Es ist dafür auf wagerechter Bahn $K = 400000 \cdot 0{,}0025 = 1000^{\text{kg}}$. Auf einer Steigung $\alpha = 1 : 800$ ist dann die Zugkraft nöthig (Fig. 316)

Fig. 316.

$K_1 = 400000 : 800 + 1000 = 1500^{\text{kg}}$;

soll der Zug aber auf derselben Rampe abwärts fahren, so wirkt 500 abwärts, der Widerstand $= 1000^{\text{kg}}$ aufwärts; es ist also noch in der Richtung der Bewegung eine Zugkraft $1000 - 500 = 500^{\text{kg}}$ nöthig. — Für $\alpha = \alpha_0$ ist bei der Abwärtsbewegung keine bewegende oder hemmende Kraft erforderlich, dagegen ist bei der Aufwärtsbewegung $K_1 = (Q + Q_1)\ \alpha_0 + K = 2\ K$, d. h. doppelt so gross wie auf wagerechter Bahn. — Ist $\alpha > \alpha_0$, z. B. $\alpha = 1 : 200$, so wird für Aufwärtsfahrt $K_1 = 400000 : 200 + 1000 = 3000^{\text{kg}}$, für Abwärtsfahrt eine Hemmkraft (Gl. 16) $K_2 = 400000 : 200 - 1000 = 1000^{\text{kg}}$ nöthig. Diese wird erzeugt, indem man Bremsbacken oder Bremsklötze mit solcher Kraft an die Räder presst, dass dadurch eine Gesammtreibung an den Umfängen der Räder im Betrage von K_2 entsteht. Diese wirkt mit dem Widerstandsmomente $K_2 R$ an den Achsen wie eine vielfach vergrösserte Zapfenreibung und erfordert in ähnlicher Weise wie diese (Fig. 313) ein im Sinne der Drehung der Achsen wirkendes Kräftepaar $K_2 R$, indem an den Stellen der Berührung der Räder mit den Schienen eine der Bewegung entgegengesetzt wirkende Reibungskraft von der Grösse K_2 hervorgerufen wird, welche nach dem Satze von der Bewegung des Schwerpunktes (S. 142) auf die Bewegung des Fuhrwerkes im Ganzen gerade so einwirkt, als ob sie im Schwerpunkte des

Fuhrwerks oder in den Achsmitten oder irgend wo am oberen Theile des Wagenkastens angriffe.

In den bisherigen Betrachtungen und Beispielen sind als Widerstände nur Zapfenreibung und Rollwiderstand berücksichtigt. Dies genügt nur für Bewegung mit geringer Geschwindigkeit. Denn es tritt noch ein Luftwiderstand hinzu, der bei langsamer Bewegung des Zuges gering, bei schneller Bewegung aber sehr bedeutend ist. Auf diesen Widerstand kann hier nicht eingegangen werden; es sei nur erwähnt, dass bei schnell fahrenden Personenzügen die Widerstandsziffer oder Gleichgewichtsneigung α_0 auf 0,01 steigt, dass also der Gesammtwiderstand bei voller Geschwindigkeit etwa 4 Mal so gross ist wie bei langsamer Bewegung.

Für Strassenfuhrwerke ist die Ziffer α_0 erheblich grösser als für Eisenbahnwagen. Einmal sind die Achslager oder Achsbüchsen nicht so vollkommen; namentlich aber ist die Fahrbahn eine viel weniger regelmässige, so dass der Rollwiderstand ganz bedeutenden Einfluss gewinnt. Aber auch bei diesen Fuhrwerken kann man nur den Gesammtwiderstand durch α_0 ausdrücken. Für bestes Steinpflaster ist etwa $\alpha_0 = 1:80$, für gewöhnliche Landstrasse $\alpha_0 = 1:30$. Soll nun auf Landstrassen im Flachlande, wo die gewöhnlichen Fuhrwerke nicht mit Bremsen versehen sind, beim Abwärtsfahren ein Zurückhalten des Wagens durch die Pferde nicht nöthig sein, so dürfen die vorkommenden Gefälle nicht stärker als die Gleichgewichtsneigung α_0 sein. Für $\alpha = \alpha_0$ läuft der Wagen abwärts frei, während die zum Aufwärtsziehen erforderliche Kraft doppelt so gross ist wie auf der Wagerechten.

13. Die Schraube.

Die Schraubenspindel kann man betrachten als bestehend aus einem cylindrischen Kerne, um den die Schraubengänge als nach einer Schraubenlinie gestaltete vorspringende Leisten herumgelegt sind. Die Schraubengänge bilden mit dem Kerne einen festen Körper. Bei der flachgängigen Schraube hat der Schraubengang rechteckigen Querschnitt, bei der scharfgängigen Schraube ist seine Querschnittsform ein gleichschenkliges (nahezu gleichseitiges) Dreieck. Die Schraubenmutter ist ein fester Körper, der die Schraubenspindel mit geringem Spielraume umschliesst.

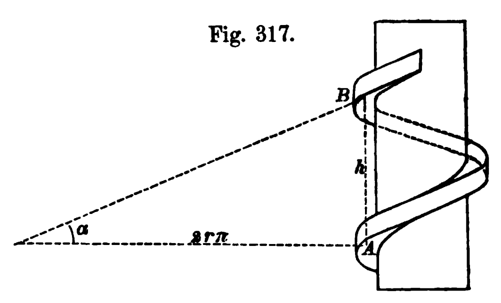


Fig. 317.

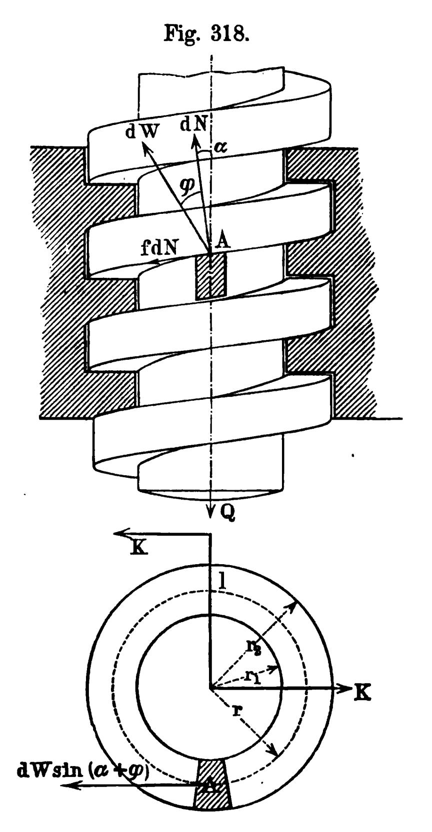
Wird die Schraubenmutter festgehalten, so kann die Schraubenspindel nur eine sog. Schraubenbewegung ausführen, indem mit der

Drehung um die Achse der Spindel eine Verschiebung längs derselben verbunden ist. Verfolgt man einen Schraubengang, an einem Punkte A (Fig. 317) beginnend, so weit, bis man bei B eine Stelle trifft, die mit A auf einer und derselben Lothrechten liegt, so ist der Abstand $AB = h$ die Ganghöhe der Schraube; dies ist derjenige Weg, um welchen sich die Schraubenspindel während einer Umdrehung längs der Achse verschiebt. Befindet sich der Punkt A in einem Abstande r von der Achse, so ist die ebene Abwickelung der Schraubenlinie von A bis B eine geneigte Gerade mit den Projektionen h und $2r\pi$, mit einem Neigungsverhältnisse

1) $$\operatorname{tg} \alpha = h : (2r\pi).$$

Da nun h der für alle Theile der Spindel gleiche Verschiebungsweg längs der Achse bei einer Umdrehung ist, so werden die Schraubenlinien auf denen sich die verschiedenen Punkte der Spindel bewegen, verschiedene Ansteigungswinkel α haben, u. zw. um so kleiner, je grösser der Abstand r des Punktes von der Achse.

Fig. 318.



Flachgängige Schraube (Fig. 318). Auf die Spindel wirke eine (etwa abwärts gerichtete) Kraft Q in der Richtung der Achse. Es soll dasjenige Kräftepaar Kl berechnet werden, welches die Spindel in gleichmässige Schraubenbewegung versetzt, so dass ihre Verschiebung dem Sinne der Kraft Q entgegengesetzt ist. Die Spindel stützt sich auf die Gänge der Schraubenmutter, erfährt von diesen Normal- und Reibungswiderstände, die sich zu Gesammtwiderständen zusammensetzen. Die Widerstände vertheilen sich auf die Breite des Schraubenganges, doch machen wir die vereinfachende

Voraussetzung, dass sie an dem Halbmesser $r = \frac{1}{2}(r_1 + r_2)$ angreifend gedacht werden können. An einem Theilchen des Schraubenganges bei A wirkt ein Normaldruck dN, der gegen die Achse der Spindel um denselben Winkel a geneigt ist, den die mittlere Schraubenlinie mit der Querschnittsebene der Spindel bildet. dN setzt sich mit der Reibung $f dN$ zu dW zusammen, welches von dN um den Reibungswinkel φ abweicht, daher mit der Achsenrichtung der Schraube den Winkel $a + \varphi$ bildet. dW liefert in der Richtung der Drehachse eine Seitenkraft $dW \cos(a + \varphi)$, und die Summe aller dieser Seitenkräfte muss der entgegengesetzten Kraft Q gleich sein, weil die Verschiebung gleichförmig erfolgen soll (s. A. Ritter, Technische Mechanik). Da nun a und φ für die ganze Erstreckung des Schraubenganges dieselben Werthe haben, so ist

2) $$Q = \cos(a + \varphi) \Sigma dW.$$

Die wagerechten Seitenkräfte von dW sind Kräfte $dW \sin(a + \varphi)$, welche im Grundrisse sämmtlich Tangenten an den Kreis vom Halbmesser r bilden. In Bezug auf die Achse der Spindel haben sie eine Momentensumme $r \sin(a + \varphi) \Sigma dW$, welches Widerstandsmoment durch das treibende Kräftepaar Kl überwunden werden muss, also

3) $$Kl = r \sin(a + \varphi) \Sigma dW.$$

Theilt man Gl. 3 durch Gl. 2, so entsteht $\frac{Kl}{Q} = r \operatorname{tg}(a + \varphi)$ oder

4) $$Kl = Qr \operatorname{tg}(a + \varphi),$$

was sich mit $\operatorname{tg} \varphi = f$, für die Rechnung bequemer, schreiben lässt:

5) $$Kl = Qr \frac{\operatorname{tg} a + f}{1 - f \operatorname{tg} a}.$$

Für gleichmässige Abwärtsbewegung im Sinne der Kraft Q kehren sich die Vorzeichen von φ und f um:

6) $$K_1 l = Qr \operatorname{tg}(a - \varphi) = Qr \frac{\operatorname{tg} a - f}{1 + f \operatorname{tg} a}.$$

Alle Kräftepaare $K_2 l$, unter deren Einwirkung die Schraubenspindel im Ruhezustande verbleibt, liegen zwischen den Grenzen Kl und $K_1 l$.

Für $a = \varphi$ ist $K_1 l = 0$, also $K_1 = 0$, d. h. es verhält sich in diesem Falle die Spindel ähnlich wie ein Körper, der auf schiefer

Ebene unter einem Neigungswinkel $\alpha = \varphi$ unter Einwirkung der Schwere ohne Kräfte K gleichmässig abwärts gleitet. Für $\alpha > \varphi$ muss der Körper durch eine aufwärts gerichtete Kraft, die Spindel durch das Moment $K_1 l$ an beschleunigter Abwärtsbewegung verhindert werden. Für $\alpha < \varphi$ muss der Körper durch eine abwärts gerichtete Kraft, die Spindel durch ein Moment $(-K_1 l)$ abwärts bewegt werden, da die abwärts treibende Kraft der Schwere oder der Last Q geringer ist als die Reibungswiderstände.

Da die Kraft Q und das Moment Kl mit den Widerständen $[dW]$ im Gleichgewichte sind und da die Widerstände $[dW]$ nach dem Gesetze der Wechselwirkung entgegengesetzt auf die Schraubenmutter wirken, so übertragen sich Q und Kl auf die Schraubenmutter; soll nun letztere nicht in Bewegung gerathen, so müssen an ihr Widerstände auftreten, welche dem Entgegengesetzten von Q und Kl gleichwerthig sind.

Der Wirkungsgrad der flachgängigen Schraube ergiebt sich, wenn man eine Umdrehung betrachtet, zu $\eta = \frac{Qh}{Kl2\pi}$, denn dabei wird der Angriffspunkt von Q um h gehoben, die Arbeit des Momentes Kl ist aber nach S. 221 gleich dem Momente mal dem Drehungswinkel. Da nun $h = 2r\pi \operatorname{tg}\alpha$, so wird mit Gl. 4:

$$7)\qquad \eta = \frac{Q\,2r\pi \operatorname{tg}\alpha}{Q r \operatorname{tg}(\alpha+\varphi)\,2\pi} = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}(\alpha+\varphi)}.$$

Beispiel: Es sei $f = 0{,}15$. Wählt man nun $\operatorname{tg}\alpha$ ebenso gross, so wird

$$\operatorname{tg}(\alpha+\varphi) = \frac{0{,}15 + 0{,}15}{1 - 0{,}15 \cdot 0{,}15}, \quad \text{daher } \eta = \frac{0{,}15 \cdot 0{,}9775}{0{,}3} = 0{,}49.$$

In diesem Falle $\alpha = \varphi$ steht die Schraube an der Grenze der Selbstsperrung; im Zusammenhange damit ist ihr Wirkungsgrad annähernd $0{,}5$ (vergl. S. 216). Bei den meisten Anwendungen der Schraube ist Selbstsperrung erwünscht; ist z. B. $\operatorname{tg}\alpha = 0{,}07$ $f = 0{,}15$, so wird $\operatorname{tg}(\alpha+\varphi) = \frac{0{,}07 + 0{,}15}{1 - 0{,}07 \cdot 0{,}15}$ und $\eta = \frac{0{,}07 \cdot 0{,}9895}{0{,}22} = 0{,}32$. Der Wirkungsgrad der Schraube ist daher nur ein geringer.

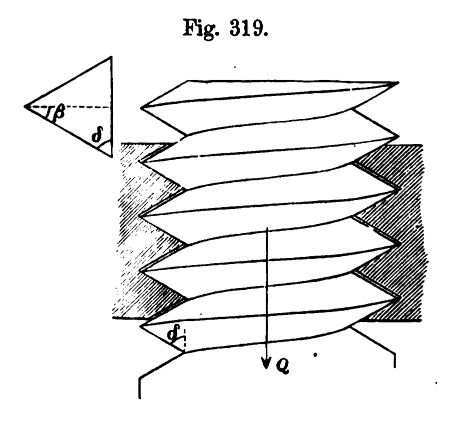
Bei kleinen Werthen von f und $\operatorname{tg}\alpha$ kann $f \operatorname{tg}\alpha$ gegen 1 vernachlässigt werden, so dass $\operatorname{tg}(\alpha+\varphi) = \operatorname{tg}\alpha + f$; dann ergiebt sich einfach $Kl = Qr(\operatorname{tg}\alpha + f)$ und $\eta = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{f + \operatorname{tg}\alpha}$. Dies ergiebt z. B.

für $f = \operatorname{tg}\alpha = 0{,}15$: $\eta = 0{,}5$;

für $f = 0{,}15$, $\operatorname{tg}\alpha = 0{,}07$: $\eta = 0{,}318$.

Scharfgängige Schraube (Fig. 319). Bei dieser ist der Querschnitt des Schraubenganges ein gleichschenkliges Dreieck mit dem Kantenwinkel $2\beta = 55^0$. Der Übergang von der flachgängigen zur scharfgängigen Schraube ist hinsichtlich des Verhältnisses der wirkenden Kräfte ungefähr so zu beurtheilen wie der Übergang von dem Spurzapfen mit ebener Tragfläche zu dem kegelförmigen Spurzapfen; es findet auch hier ein keilartiges Einpressen der Spindel in die (wenn auch nur annähernd) trichterförmigen Gänge der Schraubenmutter und dadurch eine Vergrösserung der Reibungswiderstände statt, die man am einfachsten berücksichtigt, indem man f, wo es in den Gleichungen der flachgängigen Schraube vorkommt, mit $f : \sin \delta$ oder mit $f : \cos \beta$ vertauscht. Denn δ (der halbe Keilnuthenwinkel) ist die Neigung der Kante des Gewindequerschnitts gegen die Achse, mithin $\delta = 90^0 - \beta$. Behufs kürzester Schreibweise kann man auch den Reibungswinkel φ mit dem Winkel ψ vertauschen, wenn

Fig. 319.



$$\operatorname{tg} \psi = \operatorname{tg} \varphi : \cos \beta = f : \cos \beta = f \sec \beta$$

(vergl. S. 197). Dann wird für die scharfgängige Schraube

$$8) \qquad K l = Q r \operatorname{tg}(\alpha + \psi) = Q r \frac{\operatorname{tg} \alpha + f \sec \beta}{1 - f \sec \beta \operatorname{tg} \alpha},$$

$$9) \qquad K_1 l = Q r \operatorname{tg}(\alpha - \psi) = Q r \frac{\operatorname{tg} \alpha - f \sec \beta}{1 + f \sec \beta \operatorname{tg} \alpha}.$$

Selbstsperrung tritt jetzt ein für $\operatorname{tg} \alpha \leqq \operatorname{tg} \psi = f : \cos \beta$.

$$10) \qquad \eta = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg}(\alpha + \psi)} = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \alpha + f \sec \beta} (1 - f \sec \beta \operatorname{tg} \alpha).$$

Diese Gleichungen sind die allgemeineren; mit $\cos \beta = \sec \beta = 1$ entstehen daraus wieder Gl. 5, 6 und 7 für flachgängige Schrauben.

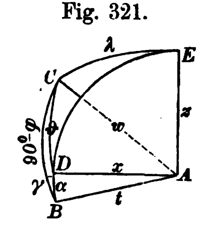
Beispiel: Für $r = 0{,}015$ m; $h = 0{,}003$ m; $\operatorname{tg} \alpha = \dfrac{0{,}003}{2 \cdot 0{,}015 \cdot \pi} = 0{,}032$; $f = 0{,}15$; $\cos \beta = \cos 27\,^1\!/_2{}^0 = 0{,}887$; $f \sec \beta = 0{,}17$ und $l = 0{,}4$ m wird $Kl = 0{,}003046\ Q$; $K = 0{,}0075\ Q$; $K_1 l = -0{,}0020\ Q$; $K_1 = -0{,}005\ Q$; $\eta = 0{,}16$.

Die vorstehenden Gleichungen für die scharfgängige Schraube sind zur zahlenmässigen Berechnung völlig ausreichend, können aber in wissenschaftlicher Beziehung nur als Annäherungen gelten, denn der Übergang von der flachgängigen Schraube zur scharfgängigen, wie er auf Seite 260 behandelt wurde, ist nicht ganz zutreffend, da das Gewinde der scharfgängigen Schraube nicht als ein Kegel angesehen werden darf. Wir fügen daher noch folgende schärfere Behandlung des Falles nach, wobei wir der Notiz von Zierold über die Ableitung des Verhältnisses zwischen Kraft und Last bei der Schraube mit scharfem Gewinde (Civilingenieur 1894, S. 155) folgen.

Fig. 320.

A sei (Fig. 320) ein Punkt der mittleren Schraubenlinie vom Halbmesser r. Durch ein Bogentheilchen dieser Schraubenlinie legen wir eine Ebene E, welche den Cylinder vom Halbmesser r bei A berührt. Durch dasselbe Bogentheilchen legen wir eine Berührungsebene E_1 an die gedrückte Schraubenfläche. Rechtwinklig zu ihr steht der Normaldruck dN; die Reibung $f\,dN$ ist tangential zur mittleren Schraubenlinie; der Gesammtwiderstand dW aus dN und $f\,dN$ liegt in einer Ebene E_2, welche auf E_1 rechtwinklig steht, weil sie durch dN geht und dN winkelrecht zu E ist. Eine durch A gelegte Parallele zur Schraubenachse werde mit z bezeichnet, die Richtung der Kraft $f\,dN$ als Tangente an die Schraubenlinie mit t. Ferner legen wir durch A eine Gerade x, welche in der Ebene E liegt, u. zw. rechtwinklig zu z. Die Richtung von dW heisse w. Dann bilden w, x und t eine körperliche Ecke, und es entsteht, wenn man um A eine Kugelfläche beschreibt, das Kugeldreieck BCD (Fig. 321). Darin ist die Seite $BC = 90^0 - \varphi$, weil dW von $f\,dN$ um diesen Winkel abweicht, die Seite $BD = \alpha$, dem Neigungswinkel der mittleren Schraubenlinie. Die Seite CD zwischen w und x werde ϑ, der Winkel bei B an der Kante t aber γ genannt; dies ist der Winkel zwischen den Ebenen E und E_2.

Fig. 321.



Für das Kugeldreieck gilt dann nach dem Cosinus-Satze, weil ϑ und γ einander gegenüber liegen:

$$\cos \vartheta = \cos \alpha \cos (90^0 - \varphi) + \sin \alpha \sin (90^0 - \varphi) \cos \gamma$$

$$\text{11)} \qquad \text{oder} \quad \cos \vartheta = \cos \alpha \sin \varphi + \sin \alpha \cos \varphi \cos \gamma .$$

Die Geraden z, t und w bilden eine räumliche Ecke, der das Kugeldreieck BCE entspricht. Der Bogen BE fällt mit BD theilweise zusammen,

da t, x und z in der Ebene E liegen. In BCE ist wieder $BC = 90^\circ - \varphi$, $BE = 90^\circ + \alpha$ (denn x und z bilden mit einander einen rechten Winkel, x und t den Winkel α). Die Seite CE zwischen w und z werde λ genannt. In BCE liegen sich γ und λ gegenüber, daher ist

$$\cos\lambda = \cos(90^\circ + \alpha)\cos(90^\circ - \varphi) + \sin(90^\circ + \alpha)\sin(90^\circ - \varphi)\cos\gamma$$

12) oder $\cos\lambda = -\sin\alpha\sin\varphi + \cos\alpha\cos\varphi\cos\gamma.$

Da dW mit x und z die Winkel ϑ bezw. λ einschliesst, so wird, entsprechend den Gl. 2 und 3, S, 258:

$$Q = \cos\lambda\ \Sigma dW;$$

$$Kl = r\cos\vartheta\ \Sigma dW \quad \text{und}$$

$$Kl = Qr\frac{\cos\vartheta}{\cos\lambda} = Qr\cdot\frac{\cos\alpha\sin\varphi + \sin\alpha\cos\varphi\cos\gamma}{-\sin\alpha\sin\varphi + \cos\alpha\cos\varphi\cos\gamma},$$

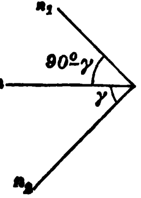
oder, wenn man Zähler und Nenner durch $\cos\alpha\cos\varphi$ theilt:

13) $$Kl = Qr\frac{f + \operatorname{tg}\alpha\cos\gamma}{-f\operatorname{tg}\alpha + \cos\gamma} = Qr\frac{\operatorname{tg}\alpha + f\sec\gamma}{1 - f\sec\gamma\operatorname{tg}\alpha}.$$

Es muss nun noch $\sec\gamma$ ermittelt, bezw. gezeigt werden, dass $\sec\gamma$ sehr annähernd $= \sec\beta$ ist, wodurch Gl. 13 in Gl. 8 übergehen würde.

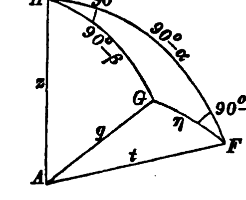
Die 3 Ebenen E, E_1 und E_2 gehen sämmtlich durch t. E_2 ist rechtwinklig zu E_1; da nun der Winkel zwischen E und E_2 γ ist, so schliessen deren Normalen n und n_2 ebenfalls diesen Winkel ein, und weil E_1 und E_2 zu einander winkelrecht, so sind es auch deren Normalen n_1 und n_2. Da die 3 Ebenen durch die Tangente t gehen, so stehen die 3 Normalen n, n_1 und n_2 (Fig. 322) sämmtlich rechtwinklig zur Tangente t, und zwischen den Normalen n und n_1 findet sich der Winkel $90^\circ - \gamma$, so dass die Ebenen E und E_1 ebenfalls den Winkel $90^\circ - \gamma$ mit einander bilden.

Fig. 322.



Nennt man g die durch A gelegte Erzeugende der Schraubenfläche, welche mit z den Winkel $90^\circ - \beta$ einschliesst, so bilden g, t und z eine Ecke, entsprechend dem Kugeldreieck FGH (Fig. 323). FH liegt in der Ebene E durch z und t, GH in einer Ebene durch die Schraubenachse, welche zu E rechtwinklig, weshalb der Winkel bei H (an der Kante z) ein Rechter. t ist gegen z um $FH = 90^\circ - \alpha$, g gegen z wie oben schon gesagt, um $GH = 90^\circ - \beta$ geneigt; nennt man noch die Seite $FG = \eta$, so giebt der Sinus-Satz:

Fig. 323.



$$\frac{\sin(90^\circ - \gamma)}{\sin 90^\circ} = \frac{\sin(90^\circ - \beta)}{\sin\eta} \quad \text{oder}$$

14) $$\cos\gamma = \frac{\cos\beta}{\sin\eta} \quad \text{und} \quad \sec\gamma = \frac{\sin\eta}{\cos\beta};$$

der Cosinus-Satz:

$$\cos\eta = \cos(90^\circ - \beta)\cos(90^\circ - \alpha) + \sin(90^\circ - \beta)\sin(90^\circ - \alpha)\cos 90^\circ$$

15) $$\text{oder} \quad \cos\eta = \sin\beta\sin\alpha$$

$$\text{und} \quad \sin\eta = \sqrt{1 - \sin^2\beta\sin^2\alpha}, \text{ mithin wegen Gl. 14}$$

$$\sec^2\gamma = \frac{1 - \sin^2\beta\sin^2\alpha}{\cos^2\beta} = \sec^2\beta - \mathrm{tg}^2\beta\sin^2\alpha$$

$$= 1 + \mathrm{tg}^2\beta - \mathrm{tg}^2\beta\sin^2\alpha = 1 + \mathrm{tg}^2\beta\cos^2\alpha$$

$$= \cos^2\alpha(\sec^2\alpha + \mathrm{tg}^2\beta) = \cos^2\alpha(1 + \mathrm{tg}^2\alpha + \mathrm{tg}^2\beta).$$

Hiermit wird (Gl. 13)

16) $$Kl = Qr\frac{\mathrm{tg}\,\alpha + f\cos\alpha\sqrt{1 + \mathrm{tg}^2\alpha + \mathrm{tg}^2\beta}}{1 - f\sin\alpha\sqrt{1 + \mathrm{tg}^2\alpha + \mathrm{tg}^2\beta}}$$

Bei den meist kleinen Ansteigungswinkeln α ist nun aber der Winkel η zwischen g und t (Fig. 323) nur wenig von einem Rechten verschieden, daher $\sin\eta$ fast $= 1$ und deshalb (Gl. 14) $\sec\gamma$ nur wenig kleiner als $\sec\beta$, oder, mit anderen Worten, es ist wegen der Kleinheit von α annähernd $\cos\alpha = 1$, $\sin\alpha = \mathrm{tg}\,\alpha$ und

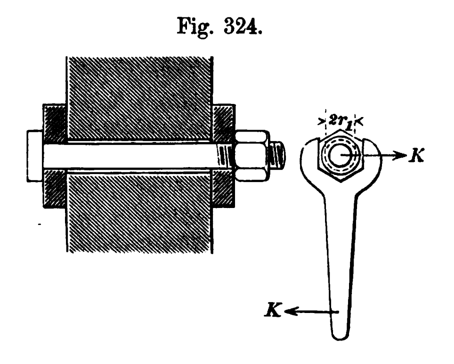
$$1 + \mathrm{tg}^2\alpha + \mathrm{tg}^2\beta = 1 + \mathrm{tg}^2\beta = \sec^2\beta,$$

womit Gl. 16 in Gl. 8 übergeht.

Für das Beispiel auf S. 261 wird nach Gl. 16 $Kl = 0{,}00303\,Q$ (gegen $0{,}003046\,Q$ nach Gl. 8). Der Unterschied ist daher sehr gering. Es ist hiernach durchaus zu empfehlen, bei kleinen Winkeln α stets Gl. 8—10 anzuwenden.

Die Reibungswiderstände sind (nach S. 260) bei scharfgängigen Schrauben grösser als bei flachgängigen. Soll daher eine Schraube zur Bewegungsübertragung (als einfache Maschine) dienen, so wählt man gewöhnlich eine flachgänge Schraube, während die scharfgängige Schraube als Befestigungsmittel den Vorzug verdient, weil in diesem Falle die grossen Reibungswiderstände gerade die Sicherheit gegen unerwünschte Lösung der Befestigung bilden.

Fig. 324.



Soll durch Drehung der Schraubenmutter mittels des Schraubenschlüssels eine Platte mit einer Kraft Q gegen eine Wand gepresst werden, so ist ausser den Reibungswiderständen im Gewinde noch ein Reibungswiderstand zwischen Schraubenmutter und Platte zu überwinden (Fig. 324). Dieser

möge an einem Kreise vom Halbmesser r_1 angreifen, dann ist das ganze erforderliche Kraftmoment

$$Kl = Qr \frac{\operatorname{tg} \alpha + f \sec \beta}{1 - f \sec \beta \operatorname{tg} \alpha} + Qfr_1 .$$

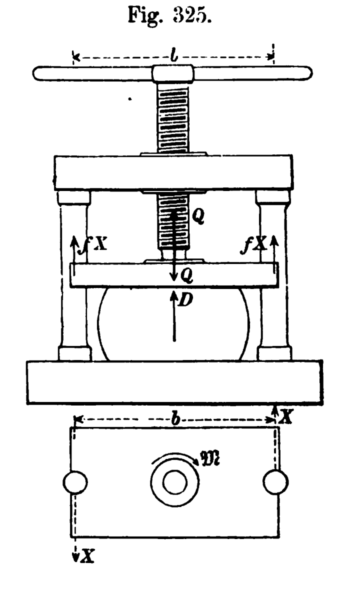
Beispiel: Es sei wiederum, wie S. 261, $r = 0{,}016^{\,m}$; $h = 0{,}003^{\,m}$; $\operatorname{tg} \alpha = 0{,}032$; $f = 0{,}15$ $\cos \beta = 0{,}887$; $f \sec \beta = 0{,}17$; $l = 0{,}4^{\,m}$; $r_1 = 0{,}02^{\,m}$; $Q = 1000^{\,kg}$; dann wird

$$Kl = 0{,}003 \cdot 1000 + 0{,}15 \cdot 0{,}02 \quad 1000 = 3 + 3 = 6^{\,mkg}, \text{ mithin } K = 15^{\,kg}.$$

Zum Lösen ist erforderlich $-K_1 l = 0{,}002 \cdot 1000 + 0{,}003 \cdot 1000 = 5^{\,mkg}$, $-K_1 = 12{,}5^{\,kg}$; ohne Reibung wäre $K_0 = 0{,}016 \quad 1000 \cdot 0{,}032 : 0{,}4 = 1{,}2^{\,kg}$, mithin ist $K = 12{,}5\, K_0$ in Folge der bedeutenden Reibung.

Beispiel: Schraubenpresse (Fig. 325). An den oberen Griffen wirkt das Kräftepaar Kl zur Hervorbringung des Druckes Q der flachgängigen Spindel gegen die Pressplatte. Dann entsteht an dem Zapfen, mittels dessen sich die Spindel auf die Pressplatte setzt, noch ein Reibungsmoment, welches wegen geringer Abrundung der Druckfläche (nach S. 227, Gl. 7) zu $\frac{1}{2} Qfr_1$ angenommen werden möge, wenn r_1 der Zapfenhalbmesser. Daher wird

Fig. 325.



$$Kl = Q \left\{ r \operatorname{tg} (\alpha + \varphi) + \tfrac{1}{2} f r_1 \right\} .$$

Für $l = 0{,}4^{\,m}$; $r = 0{,}04^{\,m}$; $\operatorname{tg} \alpha = 0{,}07$ $f = 0{,}15$; $r_1 = 0{,}03^{\,m}$ erhält man

$$\operatorname{tg} (\alpha + \varphi) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + f}{1 - f \operatorname{tg} \alpha} = 0{,}22 \quad \text{und}$$

$$K \cdot 0{,}4 = Q \left\{ 0{,}04 \cdot 0{,}22 + \tfrac{1}{2}\, 0{,}15 \cdot 0{,}03 \right\}$$

$$K \cdot 0{,}4 = 0{,}0111\, Q ; \quad K = 0{,}028\, Q .$$

Ohne Reibung wäre

$$K_0 \cdot 0{,}4 = Qr \operatorname{tg} \alpha ; \quad K_0 = 0{,}007\, Q .$$

Der Wirkungsgrad ist darnach $K_0 : K = \frac{1}{4}$. Hierbei ist noch ein kleiner Widerstand unberücksichtigt geblieben. Das Zapfenreibungsmoment $\mathfrak{M} = \frac{1}{2} f Q r_1$ drückt nämlich die Platte gegen die Führungssäulen mit den Kräften $X = \mathfrak{M} : b$; daraus entsteht an jeder Säule ein Reibungswiderstand fX, der sich dem Abwärtsgleiten der Pressplatte entgegensetzt. Mithin ist der Druck D der Platte auf den zu pressenden Körper nicht genau $= Q$, sondern

$$D = Q - 2fX = Q \left(1 - 2f \cdot \frac{fr_1}{2b} \right) = Q \left(1 - \frac{f^2 r_1}{b} \right) = Q\,(1 - 0{,}0017)$$

für $b = 0{,}4^{\,m}$. Der Unterschied zwischen D und Q ist hiernach ohne Bedeutung.

Die Kraftverhältnisse der Schraube sind unabhängig von der Anzahl der Gewindgänge, längs deren Spindel und Schraubenmutter sich berühren. In der Anwendung freilich ist die Berührung längs mehrerer Schraubengänge nothwendig, weil sonst wegen des vorhandenen Spielraumes die Sicherheit des Eingriffes leidet, u. U. auch der Druck auf die Flächeneinheit zu gross werden würde.

Schlussbemerkung über die Reibung. Ist die Reibung bei Maschinen ein erhebliches Bewegungshindernis, dessen Überwindung viel Kosten verursacht, so ist ihr Nutzen doch im gewöhnlichen Leben und in der Technik ein sehr erheblicher. Welche Erleichterung ein grosser Reibungswiderstand beim Gehen bietet, erkennt man beim Schreiten auf glattem Eise; ein grosser Theil der Befestigungen im Bau- und Maschinenwesen (durch Nägel, Keile, Schrauben) beruht auf der Reibung; die Seilreibung wird beim Hinablassen schwerer Lasten und beim Riemenbetriebe verwerthet, mittels der Reibung der Triebräder auf den Schienen setzt die Lokomotive den Zug in Bewegung; mit Hülfe der Reibung bringen wir den Zug oder ein Strassenfuhrwerk wieder zum Stillstande.

Die mechanische Arbeit, welche zur Überwindung von Reibungswiderständen dient, mithin keine sichtbare Geschwindigkeitszunahme der bewegten Körper, d. h. keine Zunahme ihres äusseren Arbeitsvermögens hervorbringt, geht aber keineswegs spurlos verloren; vielmehr setzt sie sich nach den Lehren der Physik in inneres Arbeitsvermögen, in Wärme, um. Gleichwohl ist man berechtigt, von einem Arbeitsverluste durch Reibung zu sprechen, weil die beim Gleiten entstehende Wärme dem Zwecke einer Maschine gewöhnlich nicht förderlich ist, vielmehr häufig besondere Mittel zu ihrer Ableitung und Vertheilung nöthig macht.

II. B. Beschleunigte Bewegung starrer Körper.

I. Grösse des Arbeitsvermögens eines Körpers bei einer Verschiebung bezw. einer Drehung um eine feste Achse.

Soll ein Körper von der Masse M eine reine Verschiebung erfahren, d. h. sollen seine sämmtlichen Punkte in einem Augenblicke übereinstimmende Geschwindigkeiten v und Beschleunigungen p haben, so muss nach S. 141 die Mittelkraft R aller äusseren Kräfte K durch den Schwerpunkt gehen. Die Beschleunigung des Schwerpunktes, also auch sämmtlicher Punkte des Körpers ist dann

$$1) \qquad p = \frac{R}{M}.$$

Will man den Satz der Arbeit auf starre Körper anwenden, so ist zu bemerken, dass nach S. 144 die inneren Kräfte eines starren Körpers keine Arbeit verrichten, dass $\Sigma \frac{m v^2}{2} - \Sigma \frac{m c^2}{2} = \mathfrak{A}_k$, gleich der Arbeit der äusseren Kräfte K ist.

Es kommt nun darauf an, den noch unbestimmten, allgemeinen Ausdruck für das Arbeitsvermögen eines Körpers $\Sigma \frac{m v^2}{2}$ für die einfachen Bewegungsarten in eine bestimmtere Form zu bringen.

Bei einer Verschiebung ist in einem Augenblicke die Geschwindigkeit v allen Massenpunkten gemeinsam, daher

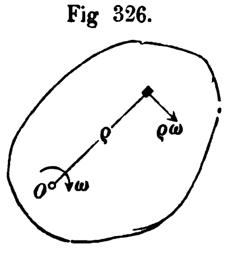
$$\Sigma \frac{m v^2}{2} = \frac{v^2}{2} m_1 + \frac{v^2}{2} m_2 + \ldots + \frac{v^2}{2} m_n = \frac{M v^2}{2},$$

und der Satz der Arbeit lautet:

$$2) \qquad \frac{M v^2}{2} - \frac{M c^2}{2} = \mathfrak{A}_k.$$

Dreht sich der Körper (Fig. 326) aber um eine feste Achse O (rechtwinklig zur Bildebene), so ist die augenblickliche Winkelgeschwindigkeit ω allen seinen Punkten gemeinsam, die Geschwindigkeit eines Punktes im Abstande ϱ von der Achse beträgt $v = \varrho\omega$. Daher wird $\Sigma \frac{mv^2}{2} = \frac{\omega^2}{2} \Sigma m\varrho^2$. Der Ausdruck $\Sigma m\varrho^2$, der nur von der Massenvertheilung des Körpers in Bezug auf die Achse abhängt, heisst nach L. Euler (1707—1783) das **Trägheitsmoment** des Körpers in Bezug auf die Achse O und wird mit J bezeichnet. Daher

Fig 326.



$$J = \Sigma(m\varrho^2) \quad \text{und} \tag{3}$$

$$\Sigma \frac{mv^2}{2} = \frac{\omega^2}{2} J, \quad \text{sowie}$$

$$\frac{\omega^2}{2} J - \frac{\omega_1^2}{2} J = \mathfrak{A}_k, \tag{4}$$

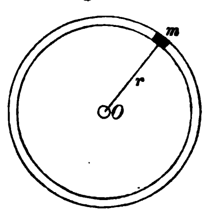
wenn ω_1 die anfängliche Winkelgeschwindigkeit ist. Die Bezeichnung Trägheitsmoment ist ganz treffend, da diese Grösse den Einfluss der trägen Masse eines Körpers bei der Drehung um eine Achse angiebt.

In gleicher Weise wie S. 125 u. ff. die statischen Momente verschiedener Körper und ebener Flächen ermittelt wurden, soll dies nun auch bezüglich der Trägheitsmomente geschehen.

2. Trägheitsmomente.

Das Trägheitsmoment J wird für solche Körper am einfachsten, deren Massentheilchen sämmtlich in gleicher Entfernung r von der Achse sich befinden. Dies findet statt bei einem Ringe von sehr geringer Wandstärke (Fig. 327). Es ist dann

Fig. 327.



$$J = \Sigma m\varrho^2 = r^2 \Sigma m = Mr^2.$$

Für die weitere Anwendung ist es häufig vortheilhaft, das Trägheitsmoment eines Körpers in Bezug auf eine Achse gleich zu setzen dem Trägheitsmomente eines dünnen Ringes von einem Halbmesser r.

Nennt man die Masse des gedachten Ringes μ, so muss

1) $$J = \mu r^2$$

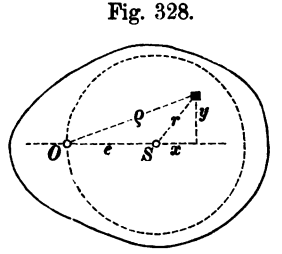
sein. Ist J berechnet, r angenommen, so ist dann auch μ bestimmt. Man nennt μ die auf den Abstand r bezogene Masse des Körpers. Bei gegebenem ω ist dann das Arbeitsvermögen dieses Ringes von der Masse μ ebenso gross wie dasjenige des gegebenen Körpers. In Gl. 1 kann von den Grössen μ und r eine gewählt werden. Setzt man $\mu = M$, d. h. gleich der wahren Masse des Körpers, und den zugehörigen Abstand $r = i$, so wird

2) $$J = Mi^2,$$

und man nennt i den **Trägheitsarm** oder **Trägheitshalbmesser** des Körpers für die Achse O. Denkt man sich die wahre Masse M des Körpers in dem Abstande i von der Achse zu einem Ringe oder einem Punkte vereinigt, so hat dies Gebilde das gleiche Trägheitsmoment mit dem Körper.

Das statische Moment $Mx_0 = \Sigma mx$ bezieht sich auf eine Ebene. Verschiebt sich die Ebene um eine Grösse e, so geht der Schwerpunktsabstand x_0 über in $x_0 \pm e$, mithin ändert sich das statische Moment um $\pm Me$. Das Trägheitsmoment bezieht sich auf eine Achse. Vertauscht man die gegebene Achse aber mit einer Parallelachse im Abstande e, so lässt sich zwischen den Trägheitsmomenten in Bezug auf die beiden Parallelachsen auch eine ähnlich einfache Beziehung aufstellen, wenn die eine Achse durch den Schwerpunkt des Körpers geht.

Fig. 328.



Die Schwerpunktsachse S stehe rechtwinklig zur Bildebene (Fig. 328), ebenso eine Achse durch O. Die entsprechenden Trägheitsmomente seien J_s bezw. J_0. Dann ist $J_s = \Sigma mr^2$, $J_0 = \Sigma m\varrho^2$. Weil nun $\varrho^2 = (e+x)^2 + y^2$ und $r^2 = x^2 + y^2$, so wird $\varrho^2 = e^2 + 2ex + r^2$, mithin $J_0 = \Sigma me^2 + \Sigma 2mex + \Sigma mr^2$ oder $J_0 = Me^2 + 2e\Sigma mx + J_s$. Weil aber der Abstand x von einer durch S gehenden Ebene gemessen ist, so wird (nach S. 126) $\Sigma mx = 0$, also

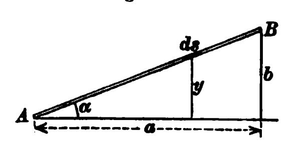
3) $$J_0 = J_s + Me^2.$$

Das Trägheitsmoment in Bezug auf eine beliebige Achse ist gleich dem Trägheitsmoment in Bezug auf die parallele Schwerpunktsachse plus der Masse mal dem Quadrate der Entfernung beider Achsen.

Sämmtliche Parallelachsen O, O_1 . . . in demselben Abstande e von S liefern gleiches Trägheitsmoment. Von allen Parallelachsen liefert die durch den Schwerpunkt gehende das kleinste Trägheitsmoment.

Trägheitsmoment der materiellen geraden Linie. Ein gerader Stab von der Länge s und dem Querschnitt F sei an einem Ende A an der als Drehachse dienenden x-Achse befestigt, während das andere Ende B durch eine masselose Stange b mit der Achse verbunden sei. Ein Massentheilchen m ist dann nach S. 33 $= \frac{\gamma}{g} F ds$ und

Fig. 329.



liefert zum Trägheitsmoment J den Beitrag $dJ = \frac{\gamma}{g} F ds\, y^2$; es ist aber $ds : s = dy : b$, mithin

$$J = \frac{\gamma}{g} \frac{Fs}{b} \int_0^b y^2 dy = \frac{\gamma}{g} \frac{Fsb^2}{3},$$

oder, weil die Masse des Stabes $M = \frac{\gamma}{g} Fs$:

4) $$J = {}^1/_3\, Mb^2.$$

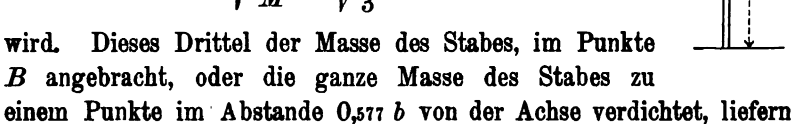
Setzt man dies $= \mu b^2$, so ist die auf den Endpunkt B oder auf den Abstand b bezogene Masse des Stabes

5) $$\mu = {}^1/_3\, M,$$

während der Trägheitshalbmesser

6) $$i = \sqrt{\frac{J}{M}} = \frac{b}{\sqrt{3}} = 0{,}577\, b$$

Fig. 330.

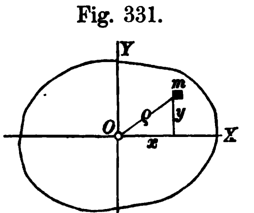


wird. Dieses Drittel der Masse des Stabes, im Punkte B angebracht, oder die ganze Masse des Stabes zu einem Punkte im Abstande $0{,}577\, b$ von der Achse verdichtet, liefern dasselbe J wie der Stab.

Für $\alpha = 90^0$ (Fig. 330) gelten dieselben Werthe; nur ist b hier gleich der Länge s des Stabes.

Trägheitsmoment einer materiellen ebenen Fläche (Scheibe). Trägheitsmomente in Bezug auf Achsen OX und OY in der Ebene der Figur (Fig. 331) nennen wir Durchmesser-Trägheitsmomente J_x und J_y. Es ist $J_x = \Sigma m y^2$, $J_y = \Sigma m x^2$, ihre Summe $J_x + J_y = \Sigma m\,(x^2 + y^2) = \Sigma m \varrho^2$; letzterer Werth ist aber das Trägheitsmoment J_0 in Bezug auf die Achse O rechtwinklich zur Fläche und heisst das polare Trägheitsmoment.

Fig. 331.



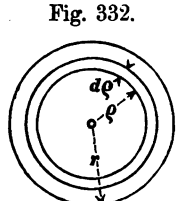
7) $$J_0 = J_y + J_x.$$

Es ist in Bezug auf einen Pol O das polare Trägheitsmoment einer ebenen Fläche gleich der Summe der beiden Durchmesser-Trägheitsmomente in Bezug auf zwei rechtwinklig zu einander stehende, durch den Pol O gelegte Durchmesser. Eine gemeinschaftliche Drehung der Durchmesser um O ändert diese Summe nicht, weil J_0 dadurch nicht beeinflusst wird.

Trägheitsmoment einer materiellen Kreisfläche. Um das polare Trägheitsmoment in Bezug auf den Mittelpunkt O (Fig. 332) zu erhalten, nehmen wir einen Ring von dem Halbmesser ϱ und der Dicke $d\varrho$ heraus. Dieser liefert, wenn δ die Dicke der Scheibe, den Beitrag

$$dJ = \frac{\gamma}{g}\delta \cdot 2\,\varrho\,\pi\,d\varrho \cdot \varrho^2, \text{ daher ist}$$

Fig. 332.



$$J_0 = \frac{\gamma}{g}\delta \cdot 2\pi \int_0^r \varrho^3 d\varrho = \frac{\gamma}{g}\delta \cdot \pi \frac{r^4}{2},$$

8) $$J_0 = \frac{Mr^2}{2},$$

$\mu = \frac{1}{2} M$ (bezogen auf r), $i = r\sqrt{\frac{1}{2}} = 0{,}707\, r$.

Da sämmtliche Durchmesser des Kreises gleichwerthig sind, so wird hier $J_y = J_x$, mithin $J_x + J_y = 2\,J_x = J_0$, oder

9) $$J_x = J_y = \frac{Mr^2}{4} = \frac{\gamma}{g}\delta \cdot \frac{r^4 \pi}{4}.$$

Trägheitsmoment einer mat. Rechteckfläche. Das Trägheitsmoment des Rechtecks von der Breite d, der Höhe h (Fig. 333) in Bezug auf eine Kante $AB = d$ lässt sich unmittelbar aus dem eines Stabes ableiten. Theilt man das Rechteck in lauter gleiche Streifen

von der Höhe h, so ist, nach Gleichung 5, die auf den Abstand h bezogene Masse jedes Streifens $1/3$ der wahren Masse. Das gleiche Verhältnis gilt dann auch für das ganze Rechteck, und es ist in Bezug auf AB:

Fig. 333.

$$J = 1/3\, Mh^2 = 1/3\, \frac{\gamma}{g}\, \delta \cdot d \cdot h^3.$$

Eine zu AB parallele Achse durch den Schwerpunkt S hat von AB den Abstand $e = 1/2\, h$, mithin ist

$$10)\quad J_S = 1/3\, Mh^2 - 1/4\, Mh^2 = 1/12\, Mh^2 = \frac{1}{12}\, \frac{\gamma}{g}\, \delta \cdot d \cdot h^3.$$

Für das Trägheitsmoment in Bezug auf eine Schwerpunktsachse, parallel mit h würde ebenso $1/12\, Md^2$ entstehen, mithin für das polare Trägheitsmoment $J_0 = 1/12\, M(d^2 + h^2) = 1/12\, MD^2$, wenn D die Diagonale bedeutet.

Trägheitsmoment einer mat. Dreieckfläche von der Grundlinie d, der Höhe h (Fig. 334). Zum Trägheitsmomente J_x in Bezug auf eine Achse $CX \parallel d$ liefert ein Streifen $x\,dy$ den Beitrag $dJ = \frac{\gamma}{g}\, \delta \cdot x\, dy\, y^2 = \frac{\gamma}{g}\, \frac{\delta \cdot d}{h}\, y^3 dy$ (wegen $x : d = y : h$), daher ist

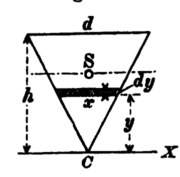


Fig. 334.

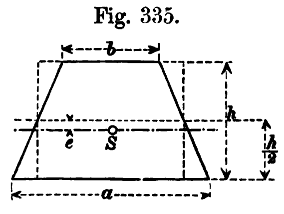
$$J_x = \frac{\gamma}{g}\, \frac{\delta \cdot d}{h} \int_0^h y^3 dy = \frac{\gamma}{g}\, \delta\, \frac{d \cdot h^3}{4} = \frac{Mh^2}{2};$$

darin bezeichnet δ die Dicke der Platte. In Bezug auf eine Schwerpunktsachse $\parallel d$ ist wegen des Abstandes $e = 2/3\, h$:

$$11)\quad J_S = J_x - M\frac{4}{9}\, h^2 = Mh^2\left(\frac{1}{2} - \frac{4}{9}\right) = \frac{Mh^2}{18} = \frac{\gamma}{g}\, \delta\, \frac{d \cdot h^3}{36}.$$

Trägheitsmoment eines mat. Trapezes. In Bezug auf eine Achse in der Mitte der Höhe (Fig. 335) ist das Trägheitsmoment J_1 offenbar ebenso gross wie dasjenige des gestrichelten flächengleichen Rechtecks, da die von unten nach oben verdrehten Dreiecke in beiden Lagen die gleichen Beiträge liefern; es ist also $J_1 = \frac{M}{12}\, h^2$.

Fig. 335.



Der Schwerpunkt liegt, wie man aus Gl. 8, S. 129, leicht findet, um $e = \frac{h}{6}\, \frac{a - b}{a + b}$

unterhalb der Mitte, daher ist in Bezug auf die wagerechte Schwerpunktsachse $J_S = \frac{Mh^2}{12} - \frac{Mh^2}{36}\frac{(a-b)^2}{(a+b)^2}$. Dies lässt sich zusammenziehen zu

12) $$J_S = \frac{Mh^2}{18}\left(1 + \frac{2ab}{(a+b)^2}\right),$$

in welcher Formel selbstverständlich diejenigen für Rechteck und Dreieck als Sonderfälle enthalten sind.

Trägheitsmoment eines Cylinders überall gleicher Dichte, von der Länge l, bezogen auf seine geometrische Achse. Der Cylinder lässt sich in lauter Scheiben von gleicher Dicke zerlegen, die sämmtlich gleich viel zur Masse sowie zum Trägheitsmomente beitragen. Daher muss gelten, wie für die mat. Kreisfläche (Gl. 8)

13) $$J_0 = M\frac{r^2}{2} = \frac{\gamma}{g}\frac{r^4\pi}{2}l \quad \text{und} \quad \mu = {}^1\!/_2\, M.$$

Für einen Ring von den Halbmessern r und R, der Länge l ist J_0 der Unterschied der Trägheitsmomente der Cylinder der Halbmesser R und r, d. h.

$$J = \frac{\gamma}{g}\frac{\pi}{2}(R^4 - r^4)\,l, \quad \text{und weil}$$

$$M = \frac{\gamma}{g}\pi(R^2 - r^2)\,l,$$

14) $$J_0 = {}^1\!/_2\, M(R^2 + r^2).$$

Trägheitsmoment eines Kegels in Bezug auf seine geometrische Achse (Fig. 336). Für einen Umdrehungskörper gilt, wenn man ihn in Scheiben, rechtwinklig zur Drehachse, vom Halbmesser y und der Dicke dx zerlegt, dass diese Scheibe zum Trägheitsmomente den Beitrag liefert

Fig. 336.

$$dJ = \frac{\gamma}{g}\frac{\pi}{2}y^4 dx, \quad \text{so dass}$$

15) $$J = \frac{\gamma}{g}\frac{\pi}{2}\int y^4 dx.$$

Diese Formel gilt für alle Umdrehungskörper. Die Beziehung zwischen y und x richtet sich nach der besonderen Art der Meridianlinie.

Beim Kegel ist $y : b = x : a$, daher

$$J = \frac{\gamma}{g} \frac{\pi}{2} \frac{b^4}{a^4} \int_0^a x^4 dx = \frac{\gamma}{g} \pi \frac{a b^4}{10},$$

mithin, weil $M = \frac{\gamma}{g} \pi \frac{a b^2}{3}$:

16) $$J = \frac{3}{10} M b^2; \quad i = b \sqrt{0{,}3} = 0{,}548\, b,$$

und, auf den Abstand b bezogen:

$$\mu = 0{,}3\, M.$$

Für ein Umdrehungsparaboloid wird mit $y^2 = 2\,px$

17) $$J = {}^1\!/_3\, M b^2; \quad i = 0{,}577\, b; \quad \mu = {}^1\!/_3\, M.$$

Trägheitsmoment der Halbkugel (Fig. 337). Es ist $y^2 = r^2 - x^2$,

daher $$J = \frac{\gamma}{g} \frac{\pi}{2} \int_0^r (r^4 - 2\,r^2 x^2 + x^4)\, dx = \frac{8}{30} \frac{\gamma}{g} r^5 \pi;$$

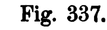
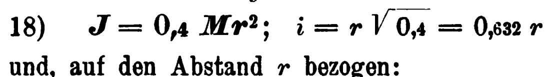


Fig. 337.

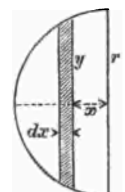
oder, weil $M = \frac{2}{3} \frac{\gamma}{g} r^3 \pi$:



18) $$J = 0{,}4\, M r^2; \quad i = r \sqrt{0{,}4} = 0{,}632\, r$$

und, auf den Abstand r bezogen:

19) $$\mu = 0{,}4\, M.$$



Für die ganze Kugel ist sowohl J wie M doppelt so gross, daher gelten die gleichen Verhältniszahlen.

Geometrische Trägheitsmomente. Setzt man in den Ausdrücken der Trägheitsmomente für ebene Flächen die Masse der Flächeneinheit $\frac{\gamma}{g} \delta = 1$ und in denen für Körper die Masse der Körpereinheit $\frac{\gamma}{g} = 1$, so erhält man für die Trägheitsmomente Ausdrücke, die nur von der geometrischen Form der Flächen bezw. Körper abhängen. Für die Massen treten dann die Flächen F bezw. Körperinhalte V an die Stelle. Diese Werthe der Trägheitsmomente nennt man geometrische Trägheitsmomente. Die Werthe sind:

Für die Kreisfläche $J_0 = {}^1\!/_2\, F r^2 = {}^1\!/_2\, r^4 \pi$;

20) $$J_x = {}^1\!/_4\, F r^2 = {}^1\!/_4\, r^4 \pi.$$

Für das Rechteck in Bezug auf eine Mittelachse

21) $$J = {}^1\!/_{12}\, d h^3 = {}^1\!/_{12}\, F h^2.$$

Für das Dreieck in Bezug auf die Schwerpunktsachse

21) $$J = {}^1/_{36}\, dh^3 = {}^1/_{18}\, Fh^2.$$

Für das Trapez in Bezug auf die Schwerpunktsachse

22) $$J = \frac{1}{18} Fh^2\left(1 + \frac{2\,ab}{(a+b)^2}\right) = \frac{h^3}{36}\left(a + b + \frac{2\,ab}{a+b}\right).$$

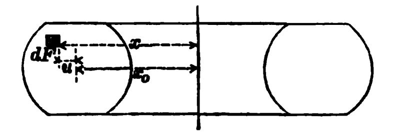
Für den Cylinder

23) $$J = {}^1/_2\, Vr^2 = {}^1/_2\, r^4 \pi l \quad \text{u. s. w.}$$

Das geometrische Trägheitsmoment einer Fläche ist wegen der Form Fi^2 vom vierten Grade, das eines Körpers wegen der Form Vi^2 vom fünften Grade.

Geometrisches Trägheitsmoment eines ringförmigen Umdrehungskörpers. Ein Theilchen dF der Meridian-Figur (Fig. 338) liefert zum geometrischen Trägheitsmoment J in Bezug auf die geometrische Achse den Beitrag $dJ = dVx^2 = 2\,x\pi dFx^2 = 2\pi x^3 dF$, daher ist

Fig. 338.



24) $$J = 2\pi \int x^3 dF.$$

Legt man durch den Schwerpunkt der Meridianfigur eine Achse, parallel der Umdrehungsachse, und hat dF von dieser Achse den Abstand u, so ist

$$x = x_0 + u; \quad x^3 = x_0^3 + 3\,x_0^2\,u + 3\,x_0\,u^2 + u^3,$$

mithin, weil x_0 für die Integration unveränderlich:

$$J = 2\pi\left\{x_0^3 F + 3\,x_0^2 \int dFu + 3\,x_0 \int dFu^2 + \int dFu^3\right\}.$$

Nach dem Satze von Guldin (S. 137) ist aber der Rauminhalt des Körpers $V = 2\pi x_0 F$; ferner $\int dFu = 0$ (nach S. 126); endlich $\int dFu^2$ das geometrische Trägheitsmoment der Meridianfigur in Bezug auf die zur Umdrehungsachse parallele Achse durch ihren Schwerpunkt; dies werde $\mathfrak{J}$ genannt, so dass

25) $$J = Vx_0^2 + 6\pi x_0 \mathfrak{J} + 2\pi \int dFu^3.$$

Ist die Schwerpunktsachse der Figur eine Symmetrieachse derselben, so wird $\int dFu^3 = 0$, da dFu^3 in gleich viel positiven und negativen Elementen auftritt, daher

26) $$J = Vx_0^2 + 6\pi x_0 \mathfrak{J} = V\left(x_0^2 + 3\frac{\mathfrak{J}}{F}\right).$$

(Für einen sehr dünnen Ring wäre bekanntlich nach Gl. 1 $J = Vx_0^2$.)

Ist die Meridianfigur ein Kreis vom Halbmesser a (Fig. 339), so wird $\mathfrak{J} = {}^1/_4\, F a^2$, mithin

$$J = V\,(x_0{}^2 + {}^3/_4\, a^2)\,.$$

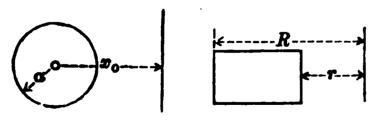


Fig. 339. Fig. 340.

Für ein Rechteck als erzeugende Figur (Fig. 340) ist $\mathfrak{J} = F \cdot {}^1/_{12}\,(R - r)^2$, $x_0 = {}^1/_2\,(R + r)$, somit

$$J = V\left\{ {}^1/_4\,(R + r)^2 + {}^1/_4\,(R - r)^2 \right\}$$
$$= {}^1/_4\, V \left\{ R^2 + 2\,R\,r + r^2 + R^2 - 2\,R\,r + r^2 \right\}$$
$$= {}^1/_2\, V\,(R^2 + r^2),$$ übereinstimmend mit Gl. 14, S. 272.

Trägheitsmoment eines aus 2 Theilen bestehenden Körpers. Legt man (Fig. 341) durch die Schwerpunkte S_1 und S_2 der beiden Theile und durch den Gesammtschwerpunkt S parallele Achsen, sind e_1, e_2 und e die Abstände der Achsen, J_1 und J_2 die Trägheitsmomente der Theile bezüglich der eigenen Schwerpunktsachsen, so ist für den ganzen Körper und seine Schwerpunktsachse (Gl. 3, S. 268)

Fig. 341.

$$J = J_1 + M_1 e_1{}^2 + J_2 + M_2 e_2{}^2.$$

Weil aber $M_2 e_2 = M_1 e_1$ und $e_1 + e_2 = e$,

so wird $$e_1 = e \frac{M_2}{M_1 + M_2}.$$

Man kann auch schreiben:

$$J = J_1 + J_2 + M_1 e_1 e_1 + M_2 e_2 e_2$$
$$= J_1 + J_2 + M_1 e_1 (e_1 + e_2)$$
$$= J_1 + J_2 + M_1 \frac{e^2 M_2}{M_1 + M_2}$$

27) $$J = J_1 + J_2 + \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2} e^2.$$

3. Winkelbeschleunigung.

Soll ein Körper sich gleichförmig um eine feste Achse drehen, so muss die Momentensumme der äusseren Kräfte in Bezug auf die Achse Null sein (S. 219) Ist die Momentensumme von Null verschieden, so erfolgt die Drehung nicht gleichförmig, sondern mit einer Winkelbeschleunigung ε. Ebenso wie bei der geradlinigen Bewegung die Beschleunigung $p = \dfrac{dv}{dt}$ (S. 15), so ist

die sekundliche Zunahme der Winkelgeschwindigkeit die Winkelbeschleunigung

1) $$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}.$$

Die Beziehung zwischen der Winkelbeschleunigung ε und deren Ursachen, den äusseren Kräften, kann man aus dem Satze vom Arbeitsvermögen ableiten, indem man diesen auf ein Zeittheilchen dt anwendet. Die Zunahme an Arbeitsvermögen kann dann nach Gl. 4 (S. 267) geschrieben werden $\frac{1}{2} J d(\omega^2) = J \omega \, d\omega$. Die entsprechende Arbeit aber findet man in folgender Weise: Eine der äusseren Kräfte sei P und liege im Allgemeinen windschief zur Achse O. Das gemeinsame Loth zwischen der Kraft P und der Achse sei r; man zerlege die Kraft P im Fusspunkte A von r in eine Seitenkraft Z, parallel mit der Achse O, und eine Seitenkraft K, welche die Achse rechtwinklig kreuzt. Die Kraft Z hat in Bezug auf O das Moment Null und verrichtet auch bei der Drehung keine Arbeit, weil sie rechtwinklig zur Bewegungsrichtung des Punktes A steht. Die Seitenkraft K aber hat das Moment Kr und verrichtet bei der unendlich kleinen Drehung um den Winkel ωdt die Arbeit $K r \omega dt$. Für sämmtliche Punkte des Körpers ist in einem Augenblicke die Grösse ωdt die gleiche. Verfährt man mit allen äusseren Kräften ebenso wie mit P, so wird die Arbeitssumme $d\mathfrak{A}_k = \omega dt \Sigma Kr$. Darin ist ΣKr die Momentensumme der äusseren Kräfte in Bezug auf die Drehachse, schreiben wir dafür $\mathfrak{M}$, so wird nunmehr $J\omega d\omega = \omega dt \mathfrak{M}$, mithin

Fig. 342.

2) $$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{\mathfrak{M}}{J}.$$

Ebenso wie bei der Verschiebung die Beschleunigung $p = R : M$ = Kraft : träge Masse, so ist bei der Drehung um eine feste Achse die Winkelbeschleunigung = Kraftmoment : Trägheitsmoment.

Wählt man einen bestimmten Drehungshalbmesser oder Hebelarm r, so ist an dessen Endpunkte die Umfangsgeschwindigkeit $v = r\omega$, die Umfangsbeschleunigung oder Tangentialbeschleunigung

3) $$p_t = r d\omega : dt = r\varepsilon;$$

bringt man nun das Kraftmoment $\mathfrak{M}$ auf den Hebelarm r, setzt $\mathfrak{M} = Kr$ und schreibt $J = \mu r^2$, so wird aus Gl. 2 und 3

$$p_t = r\varepsilon = \frac{\mathfrak{M} r}{J} = \frac{K r^2}{\mu r^2} \text{ oder}$$

4) $$p_t = \frac{K}{\mu},$$

d. h. wenn man Alles auf den gleichen Abstand oder Drehungshalbmesser r bezieht, hat man wie bei einer Verschiebung:

$$\text{Umfangsbeschleunigung} = \frac{\text{Kraft}}{\text{Masse}}.$$

Auch Gl. 4 (S. 267) für das Arbeitsvermögen kann man entsprechend umformen. Setzt man am Ende des Armes r die Anfangsgeschwindigkeit $c = r\omega_1$, die Endgeschwindigkeit $v = r\omega$, $J = \mu r^2$, so wird aus $\frac{1}{2}(\omega^2 - \omega_1^2) J = \mathfrak{A}_k$:

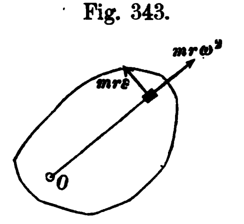
$$\tfrac{1}{2}(v^2 - c^2)\mu = \mathfrak{A}_k \text{ oder}$$

5) $$\frac{\mu v^2}{2} - \frac{\mu c^2}{2} = \mathfrak{A}_k,$$

wie (S. 266) für die Verschiebung eines Körpers.

Man kann Gl. 2, $\mathfrak{M} = \varepsilon J$ auch mittels des Satzes von d'Alembert (S. 139) ableiten. Ist in einem Augenblicke ω die Winkelgeschwindigkeit, ε die Winkelbeschleunigung, so führt ein Punkt des Körpers im Abstande r von der Achse (Fig. 343) eine ungleichförmige Kreisbewegung mit der Geschwindigkeit $v = r\omega$ und der Tangentialbeschleunigung $p_t = r\varepsilon$ aus; die Centripetalbeschleunigung ist $p_n = v^2 : r = r\omega^2$. Diesen entsprechen die Ergänzungskräfte $m r \varepsilon$ bezw. $m r \omega^2$. Deren Momentensumme in Bezug auf O ist $-\varepsilon \Sigma m r^2 = -\varepsilon J$.

Fig. 343.



Den gleichen, aber entgegengesetzten Werth muss auch die Momentensumme $\mathfrak{M}$ der äusseren Kräfte haben, d. h.

6) $$\mathfrak{M} = \varepsilon J.$$

4. Physisches Pendel.

Ein Körper, der um eine nicht durch den Schwerpunkt gehende wagerechte Achse drehbar ist und unter alleiniger Wirkung der Schwere steht, bildet, wenn er in der sicheren Gleichgewichtslage nicht die Geschwindigkeit Null hat, ein Pendel, welches, zum Unterschiede von dem aus einem einzelnen Massenpunkte m mit

gewichtlosem Faden bestehenden, S. 76 behandelten, mathematischen Pendel, **physisches Pendel** genannt wird.

Fig. 344.

Der beliebig gestaltete Körper sei zunächst so festgehalten, dass der Schwerpunkt S (Fig. 344) in gleicher Höhe mit der Achse O liegt, und werde nun losgelassen. Es soll die Winkelgeschwindigkeit ω berechnet werden, mit der der Drehungshalbmesser $OS = e$ des Schwerpunktes durch die Lothrechte hindurchschwingt.

Wendet man auf die Bewegung SS_1 den Satz der Arbeit an, so ergiebt sich (nach S. 267) $\frac{1}{2}\omega^2 J - 0 = Mge$, mithin

$$1)\qquad \omega = \sqrt{2ge\frac{M}{J}} = \sqrt{2g\frac{e}{i^2}} \quad \text{mit } J = Mi^2 \text{ (S. 268).}$$

Ist der Körper ein Stab, eine materielle Gerade von der Länge a (Fig. 345), so ist

$$e = \tfrac{1}{2}a,\quad J = \tfrac{1}{3}Ma^2,$$

mithin

$$2)\qquad \omega = \sqrt{\frac{g\,a\,3}{a^2}} = \sqrt{\frac{3g}{a}}$$

und die Umfangsgeschwindigkeit bei C:

Fig. 345.

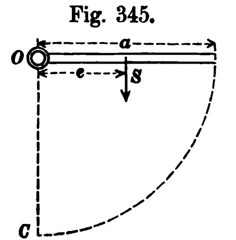
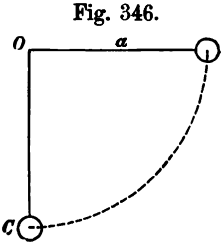


Fig. 346.



$$3)\qquad v = a\omega = \sqrt{3ga},$$

während für einen Massenpunkt am Ende einer gewichtlosen Stange von der Länge a (Fig. 346)

$$4)\qquad v = \sqrt{2ga} \text{ sein würde.}$$

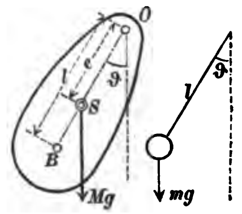
Schwingungsdauer des physischen Pendels. In einer beliebigen Zwischenlage (Fig. 347), in der OS mit der Lothrechten den Winkel ϑ bildet, ist das Moment

$$\mathfrak{M} = Mg\,e\sin\vartheta,$$

daher die Winkelbeschleunigung

$$\varepsilon = \frac{Mg\,e\sin\vartheta}{J_0}.$$

Fig. 347.



Für ein mathematisches Pendel aber von einer Pendellänge l ist bei demselben Abweichungswinkel ϑ, weil $J = m l^2$,

$$\varepsilon_1 = \frac{m g l \sin\vartheta}{m l^2} = \frac{g \sin\vartheta}{l}.$$

Beide Beschleunigungen ε und ε_1 sind verhältnisgleich mit $\sin\vartheta$ und stimmen völlig überein, wenn

$$\frac{Mg\,e}{J_0} = \frac{g}{l}, \text{ d. h. wenn}$$

5) $$l = \frac{J_0}{Me} \text{ ist.}$$

Wählt man die Länge des mathematischen Pendels nach Gl. 5 und giebt beiden Pendeln einen gleichen Anfangswerth von ϑ, bei dem die Geschwindigkeit Null war, lässt also beide Pendel von derselben Anfangsneigung aus sich in Bewegung setzen, so wird die Beschleunigung beider Pendel für jeden Winkel ϑ die gleiche sein, daher werden beide Pendel sich übereinstimmend bewegen, mithin auch gleiche Schwingungsdauer haben müssen.

Bei kleinen Schwingungen ist nun für das mathematische Pendel die Dauer einer einfachen Schwingung nach S. 78

$$t = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Setzt man hierin den Werth l nach Gl. 5 ein, so entsteht

6) $$t = \pi\sqrt{\frac{J_0}{Mge}}$$

als Dauer einer einfachen kleinen Schwingung des physischen Pendels.

Man nennt die Länge l die Schwingungslänge des physischen Pendels. Trägt man diese Länge von O aus auf der Geraden OS ab, so erhält man mit $OB = l$ einen Punkt B, den man den Schwingungspunkt des physischen Pendels nennt (Fig. 347). Die Achse durch B rechtwinklig zur Bildebene heisst Schwingungsachse. Der Punkt B und jeder Punkt der Achse B in dem physischen Pendel schwingt gerade so, als wäre er ein einzelner, mittels eines gewichtlosen Fadens mit O verbundener Massenpunkt.

Denkt man sich durch S eine zu der Drehachse O parallele Achse gelegt und nennt das entsprechende Trägheitsmoment des Körpers J_S, so ist $J_0 = J_S + Me^2$, mithin

$$l = \frac{J_S}{Me} + e. \tag{7}$$

Zeichnet man um S als Mittelpunkt einen Kreis vom Halbmesser $SO = e$ (Fig. 348) und denkt sich den Körper an einer beliebigen, zur ursprünglichen Achse O parallelen, durch irgend einen Punkt des Kreises gelegten Achse O_1 aufgehängt, so ergiebt sich für diese neue Aufhängung die Schwingungslänge nach Gl. 7 von derselben Grösse wie bei der Aufhängung in O. Alle Seiten eines geraden Cylinders, der den genannten Kreis zum Grundkreise hat, sind hiernach Achsen gleicher Schwingungslänge und Schwingungsdauer für den Körper.

Fig. 348.

Hängt man den Körper aber an der Schwingungsachse B auf (Fig. 349), so hat man ein physisches Pendel von der Schwingungslänge l_1, wofür sich nach Gl. 7 ergiebt, indem man e mit $l - e$ vertauscht:

Fig. 349.

$$l_1 = \frac{J_S}{M(l-e)} + (l-e).$$

Weil aber nach Gl. 7 $J_S = Me(l-e)$, so erhält man

$$l_1 = \frac{Me(l-e)}{M(l-e)} + l - e = l, \tag{8}$$

d. h. das an der Achse B aufgehängte Pendel hat die gleiche Schwingungslänge wie das um die Achse O schwingende. Trägt man $l_1 = l$ von B aus auf BS auf, so erhält man O als Schwingungspunkt und die Achse O (rechtwinktig zur Bildebene) als Schwingungsachse für die Drehachse B. Die Parallelachsen O und B liefern gleiche Schwingungslänge und gleiche Schwingungsdauer, oder sind mit einander vertauschbar. Das Pendel ist bezüglich der Achsen O und B umkehrbar. Ein Kreis um S mit dem Halbmesser SB hat dieselbe Bedeutung wie der Kreis mit dem Halbmesser SO (Fig. 348).

Sämmtliche Achsen, rechtwinklig zur Bildebene, welche durch irgend einen Punkt einer der beiden Kreislinien gelegt werden, sind für den Körper Drehachsen mit übereinstimmender Schwingungslänge l.

Nach Gl. 7 ist die Schwingungslänge l von e abhängig. Fasst man nämlich bei der Vergleichung nur Achsen ins Auge, die zur Bildebene rechtwinklig, d. h. mit der ursprünglichen Drehachse O parallel sind, so ist $J_S : M$ ein konstanter Werth $= i^2$ (wo i der der Achse S entsprechende Trägheitshalbmesser ist). Wird nun e grösser und grösser, verschiebt sich also die Drehachse immer weiter vom Schwerpunkte, so nähert sich der erste Summand der rechten Seite von Gl. 7 mehr und mehr der Null, während der zweite fortwährend zunimmt; daher wird für $e = \infty$ auch $l = \infty$ und $t = \infty$. Geht aber umgekehrt e gegen Null, so wird ebenfalls $l = \infty$ und $t = \infty$, d. h. wenn die Drehachse durch den Schwerpunkt geht, so ergiebt sich, wie auch schon von S. 148 bekannt, kein Drehmoment, so dass auch keine Schwingung zu Stande kommen kann. Es muss daher einen Werth von e geben, für den l ein Minimum wird.

Schreibt man zur bequemeren Übersicht $l = y$, $e = x$, und untersucht

9) $$y = \frac{i^2}{x} + x$$

auf Minimum, so ist $\frac{dy}{dx} = -\frac{i^2}{x^2} + 1 = 0$ zu setzen. Dies verlangt $x = \pm i$. Eine besondere Untersuchung, ob hierbei ein Maximum oder Minimum vorliege ist nicht erforderlich; denn den für $x = 0$ und $x = \infty$ eintretenden Grösstwerth $y = \infty$ kennen wir bereits.

10) $$x = \pm i$$

oder in der früheren Schreibweise $e = \pm i$, worin es wegen der Bedeutung der beiden Kreise in Fig. 349 nur auf den absoluten Werth $e = i$ ankommt, ergiebt die Schwingungslänge

$$l = \frac{i^2}{i} + i = 2i, \text{ also } l - e = 2i - i = i.$$

Für eine Drehachse O, welche von S um $i = \sqrt{\frac{J_S}{M}}$ entfernt ist, wird also die Schwingungslänge

$$l_{min} = 2\,i = 2\,e, \tag{11}$$

womit die beiden Kreise in Fig. 349 zusammenfallen.

Die Darstellung der Gl. 9 ist eine Hyperbel, deren eine Asymptote die Ordinatenachse, während die andere, durch den Anfangspunkt gehend, den rechten Winkel der Koordinatenachsen halbirt. $x = i$ und $y_{min} = 2\,i$ sind in der Figur angegeben.

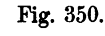
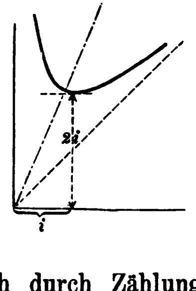


Fig. 350.



Bekanntlich werden Pendelversuche benutzt zur Ermittelung der scheinbaren Fallbeschleunigung g an verschiedenen Stellen der Erde; aus $t = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ wird $g = l\,\pi^2 : t^2$. Hieraus kann man g berechnen, wenn man für ein Pendel die Schwingungslänge l und die Dauer t einer einfachen Schwingung kennt. Letztere lässt sich durch Zählung der Anzahl der Schwingungen während einer längeren Zeit feststellen. Die Schwingungslänge könnte man wohl nach Gl. 5 S. 279 berechnen, jedoch nicht mit der erforderlichen Genauigkeit für feine Messungen, wie sie zur Ermittelung von g nöthig sind. Denn kein Körper lässt sich so gleichmässig herstellen, dass man J_0 und das statische Moment Me mit grosser Schärfe durch Messung und Rechnung zu bestimmen vermöchte. Wohl aber dient zur scharfen Bestimmung der Schwingungslänge l die Eigenschaft des Pendels, dass Drehachse und Schwingungsachse mit einander vertauschbar sind. Man stellt also ein Pendel her mit fester Schneide (Drehachse) O, berechnet annähernd l, bringt in diesem Abstande $l = OB$ eine Gegenschneide B an und verstellt an dem Körper verschiebbare Gewichte so lange, bis das Pendel, ob in O oder in B aufgehängt, gleiche Schwingungsdauer zeigt. Dann ist, wenn B und O nicht in derselben Entfernung vom Schwerpunkte liegen, wenn also B nicht den Punkt O_1 in Fig. 349 bedeutet, $OB = l$ die Schwingungslänge, die zwischen den Schneiden mit grosser Schärfe gemessen werden kann. Ein solches Pendel heisst ein Umkehrungspendel (Reversionspendel).

Ist der Körper ein dünner prismatischer Stab von der Länge a (Fig. 351) und an seinem oberen Ende aufgehängt, so ist $J_0 = {}^1/_3\, Ma^2$, $e = {}^1/_2\, a$, mithin die Schwingungslänge (Gl. 5)

$$12) \qquad l = \frac{2}{3}\,\frac{Ma^2}{Ma} = \frac{2}{3}\,a.$$

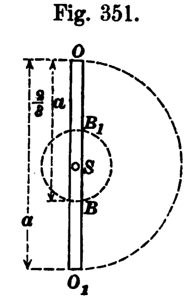


Fig. 351.

Die Achsen O, O_1, B und B_1 liefern gleiche Schwingungslänge.

Die Beobachtung der Schwingungsdauer eines als physisches Pendel eingerichteten Körpers kann auch benutzt werden, um dessen Trägheitsmoment in Bezug auf die Drehachse zu bestimmen. Gl. 6 liefert nämlich

$$13) \qquad J_0 = Mg\,e\,t^2 : \pi^2.$$

Hat man (Fig. 352) den Punkt A bestimmt, der in der sicheren Gleichgewichtslage lothrecht unter O liegt, so kann man mittels der Aufhängung des Körpers nach Fig. 352 durch das den Körper im Gleichgewichte haltende Gewicht P das statische Moment $Mg\,e = Pa$ finden. Beobachtet man sodann noch t für kleine Schwingungen, so bestimmt sich J_0 nach Gl. 13.

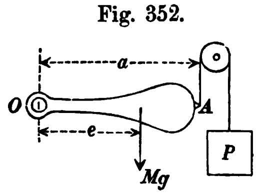


Fig. 352.

Soll das Trägheitsmoment J_s eines Körpers in Bezug auf eine Schwerpunktsachse bestimmt werden, um welche keine Schwingung entsteht, so lässt man den Körper um eine zeitweilige Achse B schwingen (Fig. 353), bestimmt $J_B = J_0$ nach Gl. 13 und findet daraus $J_s = J_B - Me^2$. Oder, wenn die Befestigung einer besonderen Achse oder Schneide nicht ausführbar, so verbindet man mit dem Körper eine Ergänzungsmasse M_1 derartig, dass sich beide Massen nicht gegen einander verrücken können. M_1 muss so gewählt sein, dass man dessen Beitrag zu J und $Mg\,e$ leicht bestimmen kann. Bringt man M_1 so an, dass es nunmehr mit dem gegebenen

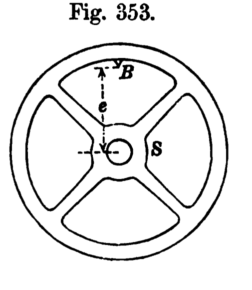
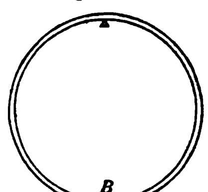


Fig. 353.

Körper ein mögliches Pendel bildet, so kann man leicht das Gesammt-Trägheitsmoment und daraus das Trägheitsmoment des gegebenen Körpers berechnen.

Fig. 354.



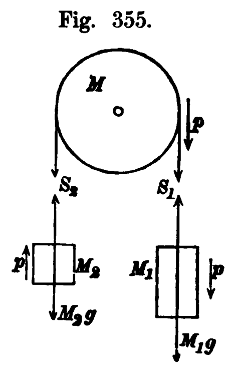
Ein dünner Ring vom Halbmesser r, nach Fig. 354 um eine Schneide schwingend, hat, wegen $J_s = M r^2$, nach Gleichung 7 die Schwingungslänge

$$l = 2\,r.$$

5. Beschleunigte Bewegung einer Seilrolle.

Um eine Seilrolle von der Masse M (Fig. 355) sei ein völlig biegsamer Faden geschlungen, an dessen Enden ungleiche Massen M_1 und M_2 hängen. Es soll die Umfangsbeschleunigung p der Rolle berechnet werden ohne Rücksicht auf Zapfenreibung und Seilbiegungswiderstand und unter der Annahme, dass ein Gleiten des Fadens auf der Rolle nicht stattfindet. Die Masse M_1 erfährt die Beschleunigung p abwärts, die Masse M_2 dieselbe Beschleunigung aufwärts. Die Spannkräfte der Seilstücke sind nicht etwa $M_1 g$ und $M_2 g$, denn diese Gleichheit findet nach S. 86 nur statt, wenn die Massen keine Beschleunigung erfahren. An der Masse M_1 muss die Mittelkraft $M_1 g - S_1 = M_1 p$, mithin

Fig. 355.



$$1) \quad S_1 = M_1 g - M_1 p, \text{ u. zw. } < M_1 g$$

sein, weil $M_1 g$ und S_1 zusammen die Beschleunigung p erzeugen Ebenso muss an der Masse M_2 die aufwärts gerichtete Beschleunigung p durch die aufwärts gerichtete Kraftsumme $S_2 - M_2 g$ hervorgebracht werden; $S_2 - M_2 g = M_2 p$, mithin

$$2) \qquad S_2 = M_2 g + M_2 p, \text{ u. zw. } > M_2 g.$$

Kann der Faden als gewichtlos betrachtet werden, so wird die gesammte Seilreibung, welche die Rolle zu beschleunigter Drehbewegung veranlasst, gemessen durch den Unterschied der Spannkräfte S_1 und S_2, daher wird nach Gl. 4, S. 277, $\mu p = S_1 - S_2$, wenn μ die auf den Umfang bezogene Masse der Rolle ist.

Also $\mu p = M_1 g - M_1 p - M_2 g - M_2 p,$
$$p(M_1 + M_2 + \mu) = M_1 g - M_2 g, \quad \text{oder}$$
3) $$p = \frac{M_1 g - M_2 g}{M_1 + M_2 + \mu} = g\,\frac{M_1 - M_2}{M_1 + M_2 + \mu}.$$

In dieser Gleichung erscheint also der Gewichtsunterschied $M_1 g - M_2 g$ als treibende Kraft, als träge Masse aber die Summe aller Massen, die an der Beschleunigung p theilnehmen, d. h. M_1, M_2 und die auf den Umfang bezogene Masse μ.

Eine Vorrichtung nach Fig. 355 ist die Atwood'sche Fallmaschine; sie dient, da p mit g verhältnisgleich ist, zur Vorführung der Gesetze der Fallbewegung in verkleinertem Mafsstabe, weil die wirkliche Fallbewegung unbequem schnell erfolgt.

Beispiel 1: Ist $Mg = 1$ kg und (nach S. 270) das auf den Umfang bezogene Gewicht der Rolle $\mu g = 1/2$ kg, $M_1 g = 4$, $M_2 g = 3{,}9$ kg, so wird, wenn man in Zähler und Nenner statt der Massen die g mal grösseren Gewichte einführt,
$$p = g\,\frac{4 - 3{,}9}{4 + 3{,}9 + 0{,}5} = g \cdot \frac{0{,}1}{8{,}4} = \frac{g}{84},$$
die Bewegung der angehängten Massen erfolgt daher nur mit $1/84$ der wahren Fallbeschleunigung.

Will man auch die Zapfenreibung mit der Reibungsziffer f und dem Zapfendurchmesser d berücksichtigen, so wird

der Zapfendruck $D = S_1 + S_2 + Mg$; es ist, wie vorher,
$$S_1 = M_1 g - M_1 p$$
$$S_2 = M_2 g + M_2 p \quad \text{und daher}$$
$$D = (M + M_1 + M_2)\,g - (M_1 - M_2)\,p$$
mit dem Momente $1/2\, Dfd$. Sonach wird, wenn r der Rollenhalbmesser,
$$\mu p = S_1 - S_2 - Df\,\frac{d}{2r}$$
$$= M_1 g - M_1 p - M_2 g - M_2 p - (M + M_1 + M_2)\,gf\,\frac{d}{2r} + (M_1 - M_2)\,pf\,\frac{d}{2r}$$
und daraus

4) $$p = g\,\frac{M_1 - M_2 - (M + M_1 + M_2)\,f\,\frac{d}{2r}}{M_1 + M_2 + \mu - (M_1 - M_2)\,f\,\frac{d}{2r}}.$$

Mit $d : r = 1 : 25$, $f = 0{,}08$, $M_1 g = 4$, $M_2 g = 3{,}9$, $Mg = 1$, $\mu g = 0{,}5$ kg wird
$$p = g\,\frac{0{,}1 - 0{,}014}{8{,}4 - 0{,}00016} \quad \text{oder rund} \quad \frac{g}{100}.$$
Hiernach wird $S_1 = 4\,(1 - 0{,}01) = 3{,}96$ kg, $S_2 = 3{,}9\,(1 + 0{,}01) = 3{,}94$ kg. Damit kein Gleiten des Fadens entstehe, muss nach S. 233 $\frac{S_1}{S_2} \leqq e^{f_1 \alpha}$ sein, worin f_1 die Reibungsziffer des Fadens, $\alpha = \pi$. Dieser Bedingung wird schon für $f_1 \geqq 0{,}0017$ genügt. Der Seilbiegungswiderstand ist hierbei vernachlässigt, da der Faden sehr dünn.

Beispiel 2: Gleiche Massen M_1 mögen an 2 mit einander verbundenen Rollen von ungleichen Halbmessern R und r hängen (Fig. 356); es soll die Umfangsbeschleunigung p der grösseren Rolle berechnet werden; die der kleinen ist dann $pr:R$. — Die Fadenkräfte sind $S_1 = M_1 g - M_1 p$; $S_2 = M_1 g + M_1 pr:R$; die Winkelbeschleunigung der Rolle ohne Rücksicht auf Reibung (nach S. 276)

Fig. 356.

$$\varepsilon = \frac{S_1 R - S_2 r}{\mu R^2} = \frac{M_1 g R - M_1 p R - M_1 g r - M_1 p \frac{r^2}{R}}{\mu R^2},$$

mithin, weil $R\varepsilon = p$,

$$\mu p = M_1 g - M_1 p - M_1 g \frac{r}{R} - M_1 p \frac{r^2}{R^2},$$

folglich

$$5) \qquad p = g \frac{M_1 \left(1 - \frac{r}{R}\right)}{M_1 \left(1 + \frac{r^2}{R^2}\right) + \mu}.$$

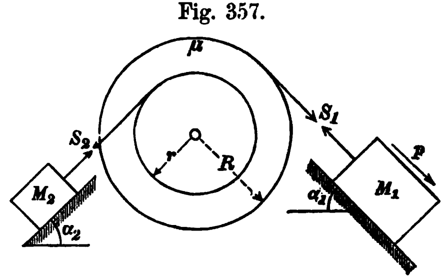
Für $R = 2r$ wird dann $p = g \frac{1/2\, M_1}{5/4\, M_1 + \mu}$, wobei zu beachten, dass μ auf den Abstand R bezogen ist.

Beispiel 3: Hängen die Massen M_1 und M_2 nicht frei herab, sondern gleiten sie mit Reibung auf schiefen Ebenen mit den Neigungswinkeln α_1 u. α_2 (Fig. 357), während an dem Rollenkörper keine Bewegungswiderstände auftreten, so entsteht an der Masse M_1 eine treibende Kraft

$$M_1 g \sin \alpha_1$$

und eine hindernde Reibung, daher ist

Fig. 357.



$$S_1 = M_1 g \sin \alpha_1 - f M_1 g \cos \alpha_1 - M_1 p;$$

ebenso ist

$$S_2 = M_2 g \sin \alpha_2 + f M_2 g \cos \alpha_2 + M_2 p \frac{r}{R};$$

wie in Beispiel 2 wird nun $\mu R p = S_1 R - S_2 r$ und demnach

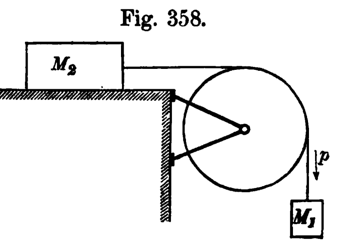
$$6) \qquad p = g \frac{M_1 (\sin \alpha_1 - f \cos \alpha_1) - M_2 (\sin \alpha_2 + f \cos \alpha_2) \frac{r}{R}}{M_1 + M_2 \frac{r^2}{R^2} + \mu}.$$

Für $r = R$ und $\alpha_1 = \alpha_2 = 90^0$ entsteht Gl. 3; für $M_2 = M_1$, $\alpha_1 = \alpha_2 = 90^0$ entsteht Gl. 5.

Für $\alpha_1 = 90^0$, $\alpha_2 = 0$, $r = R$ (Fig. 358) ergiebt sich

$$7) \qquad p = g \frac{M_1 - f M_2}{M_1 + M_2 + \mu}.$$

Fig. 358.



6. Widerstände der festen Drehachse eines Körpers bei beschleunigter Drehbewegung.

An der Achse des Körpers mögen an 2 Lagerstellen A und B die Widerstände A und B auftreten, welche die Aufgabe erfüllen, die Achse unbeweglich zu halten. Es mögen an dem Körper bewegende Kräfte $[K]$ wirken. Sind ω und ε die augenblickliche Winkel-Geschwindigkeit und Beschleunigung, so hat ein Massenpunkt eine daraus zu ermittelnde Beschleunigung p, welcher eine Ergänzungskraft $-mp$ entspricht. Es muss nun nach dem Satze von d'Alembert die Gruppe dieser Kräfte $[-mp]$ im Gleichgewichte sein mit den Widerständen A und B und der Gruppe der sonstigen äusseren Kräfte $[K]$. Hiernach können A und B gefunden werden, wenn man die Kräftegruppe $[-mp]$ kennt.

Zusammensetzung der Ergänzungskräfte $-mp$ bei ungleichmässiger Drehbewegung. Ein Massenpunkt im Abstande ϱ von der Achse (Fig. 359) führt eine Kreisbewegung aus. Seine Tangentialbeschleunigung ist $p_t = \varrho\varepsilon$, seine Centripetalbeschleunigung $p_n = \varrho\omega^2$ (S. 88). Die entsprechenden Ergänzungskräfte sind die Kraft $m\varrho\varepsilon$ (links herum) und die Centrifugalkraft $m\varrho\omega^2$. Die Drehachse wählen wir zur x-Achse; A sei der Anfangspunkt des Achsenkreuzes (Fig. 359). In einer besonderen Figur

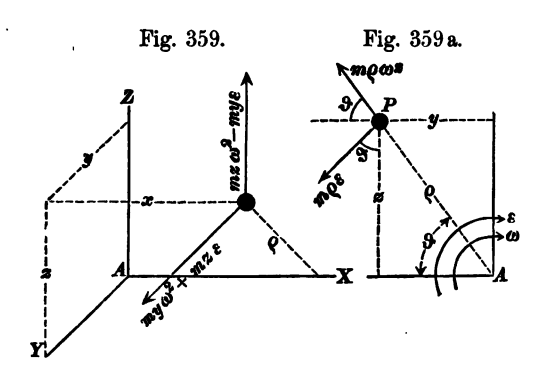


Fig. 359. Fig. 359 a.

(359 a) sei der Körper in der Richtung der Drehachse, also auf die yz-Ebene projizirt, weil die Beschleunigungen p_t und p_n und ebenso die entsprechenden Kräfte in dieser Projektion am deutlichsten erscheinen. Bildet der Halbmesser $\varrho = AP$ mit der AY den Winkel ϑ, so ist

$$\varrho \cos\vartheta = y; \quad \varrho \sin\vartheta = z.$$

Die Kraft $m\varrho\omega^2$ liefert in der positiven y-Richtung die Seitenkraft $m\varrho\omega^2 \cos\vartheta = my\omega^2$, in der positiven z-Richtung die Seitenkraft $m\varrho\omega^2 \sin\vartheta = mz\omega^2$. Ebenso giebt die Kraft $m\varrho\varepsilon$ die ent-

sprechenden Seitenkräfte $m\varrho\varepsilon \sin\vartheta = mz\varepsilon$ bezw. $-m\varrho\varepsilon\cos\vartheta = -my\varepsilon$.

Diese Seitenkräfte sind in Fig. 359 eingetragen. Denkt man sich solche Kräfte für jeden einzelnen Massenpunkt angebracht und setzt diese Kräftegruppe nach S. 112 zusammen, so erhält man 3 durch den Punkt A gehende Seitenkräfte X, Y, Z und 3 Kräftepaar-Achsen $\mathfrak{M}_x$, $\mathfrak{M}_y$, $\mathfrak{M}_z$. In der x-Richtung ergeben sich keine Seitenkräfte. In der positiven y-Richtung entsteht $Y = \Sigma my\omega^2 + \Sigma mz\varepsilon$, oder, weil ω und ε für alle Punkte dieselben Werthe haben und ausserdem $\Sigma my = My_0$, $\Sigma mz = Mz_0$ (mit y_0 und z_0 als Koordinaten des Schwerpunktes),

$$Y = My_0\omega^2 + Mz_0\varepsilon.$$

In gleicher Weise wird $Z = Mz_0\omega^2 - My_0\varepsilon$. Zur Ermittelung der Kräftepaar-Achse $\mathfrak{M}_x$ gehen wir am einfachsten auf die ursprünglichen Kräfte $m\varrho\omega^2$ und $m\varrho\varepsilon$ zurück, da $m\varrho\omega^2$ in Bezug auf AX kein Moment hat, $m\varrho\varepsilon$ aber das Moment $-m\varrho\varepsilon\varrho$, sodass $\mathfrak{M}_x = -\varepsilon\Sigma m\varrho^2 = -\varepsilon J_x$, was nach Gl. 2, S. 276 selbstverständlich war. Die in der z-Richtung wirkenden Kräfte gehen an der AY in einem Abstande x vorbei, liefern daher mit Rücksicht auf den Drehungssinn $\mathfrak{M}_y = -\omega^2\Sigma mxz + \varepsilon\Sigma mxy$; ebenso ist $\mathfrak{M}_z = \omega^2\Sigma mxy + \varepsilon\Sigma mxz$. Das Gesammtergebnis der Ergänzungskräfte $[-mp]$ ist also

$$1)\quad \begin{cases} X = 0 \\ Y = My_0\omega^2 + Mz_0\varepsilon \\ Z = Mz_0\omega^2 - My_0\varepsilon \\ \mathfrak{M}_x = \varepsilon J_x \\ \mathfrak{M}_y = -\omega^2\Sigma mxz + \varepsilon\Sigma mxy \\ \mathfrak{M}_z = \omega^2\Sigma mxy + \varepsilon\Sigma mxz. \end{cases}$$

Hiermit müssen die sämmtlichen äusseren Kräfte $[K]$ und die Widerstände A und B im Gleichgewichte sein. In den vorstehenden Gleichungen erscheinen Summenausdrücke Σmxy und Σmxz; um sie zu erhalten, muss man jedes Massentheilchen m mit zweien seiner Koordinaten xy bezw. xz multipliciren und die Glieder dann summiren. Diese Ausdrücke sind von demselben Grade, derselben Dimension wie die Trägheitsmomente $J = \Sigma m\varrho^2$ und heissen **Centrifugalmomente** $= C$. Wir wollen Σmxy und Σmxz von einander unterscheiden, indem wir neben C als Zeiger diejenige Ordinate setzen, welche in den Summen n i c h t vorkommt, mithin

$$2)\quad \Sigma mxy = C_z;\ \ \Sigma mxz = C_y.$$

Im Allgemeinen sind die Ergänzungskräfte von ω und ε abhängig, so dass auch die Widerstände der festen Achse sich mit ω und ε ändern. Geht aber die Drehachse durch den Schwerpunkt, so dass $y_0 = z_0 = 0$, und sind ausserdem die Centrifugalmomente C_y und C_z gleich Null, so werden ausser $X = 0$ auch $Y = Z = \mathfrak{M}_y = \mathfrak{M}_z = 0$, und es bilden die Kräfte $[-mp]$ nur ein $\mathfrak{M}_x$. Aus den Gl. 1 verschwinden dann, abgesehen von $\mathfrak{M}_x = -\varepsilon J_x$, sämmtliche von ω und ε abhängigen Glieder, so dass die Widerstände A und B der festen Achse sich ebenso berechnen lassen wie für den ruhenden Körper. Bilden unter dieser Voraussetzung die bewegenden Kräfte $[K]$ ein Kräftepaar $\mathfrak{M}$, dessen Achsenstrecke (S. 109) die Richtung AX hat, so ist dies mit dem berechneten $\mathfrak{M}_x = -\varepsilon J_x$ im Gleichgewichte. Weil die Normalwiderstände der Achse zu dem treibenden Momente nichts beitragen, die Kräfte $[-mp]$ sich aber in jeder anderen Beziehung aufheben, so müssen in diesem Falle die Widerstände A und B der festen Achse verschwinden. Die Achse bedarf dann gar keiner Befestigung, der Körper führt seine Drehung um die unbefestigte Achse so aus, als wäre sie fest. Eine solche Achse nennt man deshalb eine **freie Achse.** Da die sämmtlichen äusseren Kräfte $[K]$, A und B mit $[-mp]$ im Gleichgewichte sind, so kann man den Satz aussprechen:

Dreht sich ein Körper um eine **freie** Achse, so setzen sich sämmtliche äussere Kräfte an demselben lediglich zu einem Kräftepaare zusammen, dessen Achsenstrecke mit der Drehachse zusammenfällt, heben sich aber in jeder anderen Beziehung auf; die Normalwiderstände der Drehachse sind von der Geschwindigkeit und Beschleunigung unabhängig.

Ist die Drehung eine gleichförmige ($\varepsilon = 0$), so bestehen die Kräfte $[-mp]$ nur in den Centrifugalkräften, deren Zusammensetzung liefert

$$3)\quad \left\{\begin{aligned} X &= 0 \\ Y &= My_0\omega^2 \\ Z &= Mz_0\omega^2 \\ \mathfrak{M}_x &= 0 \\ \mathfrak{M}_y &= -\omega^2 C_y \\ \mathfrak{M}_z &= \omega^2 C_z. \end{aligned}\right.$$

Hiermit müssen wieder die äusseren Kräfte im Gleichgewichte sein. Weil nun zur Zusammensetzung der Centrifugalkräfte die Summen C nöthig sind, so erhielten sie den Namen „Centrifugalmoment".

Ist einem Körper eine Drehbewegung um eine feste Achse ertheilt und setzt er diese ohne weitere Einwirkung von Kräften K fort, so müssen die Widerstände A und B mit den Kräften der Gl. 3 im Gleichgewichte sein. Diese Widerstände sind durch die Winkelgeschwindigkeit bedingt und verschwinden mit dieser. Ist aber die Drehachse eine freie Achse, so heben sich die Centrifugalkräfte vollständig auf, und es werden auch keine Achswiderstände nöthig; die Drehung setzt sich um die unbefestigte Achse fort, als wäre dieselbe festgehalten. Man kann daher sagen, eine freie Achse für einen Körper ist eine solche, in Bezug auf welche die Centrifugalkräfte sich aufheben.

Einige Bedingungen für eine freie Achse. Die Centrifugalmomente C_y und C_z werden gleich Null, wenn der Körper rechtwinklig zur Drehachse AX eine Symmetrie-Ebene hat; wählt man diese nämlich zur yz-Ebene (Fig. 360), so entspricht jedem Massentheilchen mit positivem x ein gleiches mit negativem x, so dass in Σmxy und Σmxz stets je zwei gleiche, sich aufhebende Glieder $+mxy$ und $-mxy$ bezw. $+mxz$ und $-mxz$ vorkommen. Geht ausserdem noch die Drehachse durch den Schwerpunkt, so ist AX eine freie Achse. Hiernach ist für einen gleichartigen Körper von der Form eines geraden Prismas oder Cylinders die Verbindungsgerade der Schwerpunkte der Endflächen (Fig. 361) eine freie Achse.

Fig. 360.

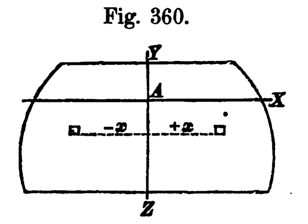
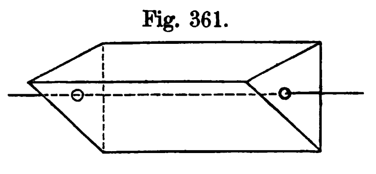


Fig. 361.



Ferner ist AX eine freie Achse, wenn man durch sie zwei rechtwinklig zu einander stehende Symmetrie-Ebenen legen kann. Wählt man diese nämlich zur xy-Ebene und xz-Ebene, so liegen je zwei Massentheilchen mit $+y$ und mit $-y$ einander gegenüber, deren eines den Beitrag $+mxy$, deren anderes den Beitrag $-mxy$ liefert, so dass $C_z = 0$ wird; ebenso $C_y = 0$.

Eingehendere Rechnungen zeigen, dass jeder noch so unregelmässige Körper mindestens drei zu einander rechtwinklige freie Achsen hat.

Andere Arten der Zusammensetzung der Ergänzungskräfte. Trennt man in Gl. 1 die durch den Anfangspunkt A gehenden Kräfte Y und Z in diejenigen Theile $Y_1 = My_0\omega^2$ und $Y_2 = Mz_0\varepsilon$ bezw. $Z_1 = Mz_0\omega^2$ und $Z_2 = -My_0\varepsilon$, welche allein von ω, bezw. von ε abhängen (Fig. 362), so lassen sich nunmehr Y_1 und Z_1 wieder zusammensetzen zu einer Mittelkraft

Fig. 362.

$$R_1 = M\omega^2\sqrt{y_0^2 + z_0^2} = M\omega^2 e,$$

wenn e die Entfernung des Schwerpunktes von der Drehachse bedeutet. Diese Kraft ist parallel mit der Richtung jenes rechtwinkligen Abstandes e. Y_2 und Z_2 geben in gleicher Weise eine Mittelkraft $R_2 = M\varepsilon e$, die zu R_1 rechtwinklig ist und, dem Sinne nach, der Umfangsbeschleunigung des Schwerpunktes entgegengesetzt ist.

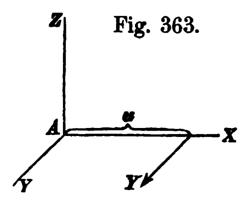


Fig. 363.

Vereinigt man die Kraft Y der Gl. 1 mit der Kräftepaarachse $\mathfrak{M}_z$, so ergiebt sich aus beiden eine Kraft von derselben Grösse $Y = My_0\omega^2 + Mz_0\varepsilon$, welche von A aus um

$$5)\qquad u = \frac{\mathfrak{M}_z}{Y} = \frac{\omega^2 C_z + \varepsilon C_y}{My_0\omega^2 + Mz_0\varepsilon}$$

im Sinne der positiven x-Richtung parallel verschoben ist (Fig. 363).

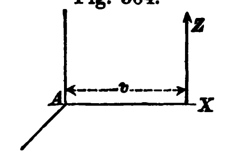


Fig. 364.

Vereinigt man ebenso Z mit $\mathfrak{M}_y$, so erhält man eine gleiche Kraft

$$6)\qquad Z = Mz_0\omega^2 - My_0\varepsilon, \text{ welche um}$$

$$7)\qquad v = \frac{-\mathfrak{M}_y}{Z} = \frac{\omega^2 C_y - \varepsilon C_z}{Mz_0\omega^2 - My_0\varepsilon}$$

im Sinne der positiven x-Richtung parallel verschoben ist (Fig. 364). Auf diese beiden im Raume sich rechtwinklig kreuzenden Kräfte ist mithin die Gruppe $[-mp]$ auch zurückzuführen.

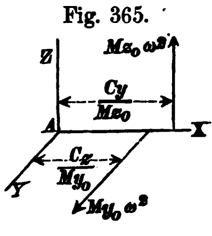
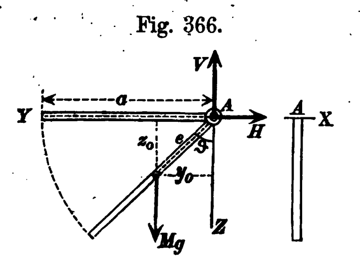


Fig. 365.

Im Falle der gleichförmigen Drehung ($\varepsilon = 0$) vereinfachen sich diese Ergebnisse in der Weise der Fig. 365.

Beispiel 1: Eine als materielle Gerade aufzufassende Stange von der Länge a schwinge unter Einwirkung der Schwere um eine durch den Endpunkt gelegte wagerechte Achse (Fig. 366). Die Bewegung möge von der wagerechten Lage ausgegangen sein. Hier liegt ein Fall vor, wo C_y und C_z Null sind, weil AYZ eine Symmetrie-Ebene für die Stange ist. Die Drehachse ist aber keine freie Achse, weil sie nicht durch den Schwerpunkt geht. In einer beliebigen Zwischenlage ist $y_0 = e \sin\vartheta$; $z_0 = e\cos\vartheta$, wobei $e = {}^1/_2\, a$; ferner ist $J_x = {}^1/_3\, Ma^2$; und für die Winkelgeschwindigkeit ω und Beschleunigung ε in der beliebigen Zwischenlage gelten:

Fig. 366.



$$\text{(nach S. 267)} \qquad {}^1/_2\, J_x\,\omega^2 = Mg\,z_0,$$

$$\omega^2 = \frac{2\,Mg\,z_0}{J_x} = \frac{3\,g\cos\vartheta}{a};$$

$$\text{(nach S. 276)} \qquad \varepsilon = \frac{Mge\sin\vartheta}{J_x} = \frac{3}{2}\,\frac{g\sin\vartheta}{a}.$$

Die Kräftegruppe $[-\,mp]$ liefert hiernach (Gl. 1, S. 288)

$$X = 0;$$

$$Y = \frac{Ma}{2}\sin\vartheta\,\frac{3\,g\cos\vartheta}{a} + \frac{Ma}{2}\cos\vartheta\,\frac{3}{2}\,\frac{g\sin\vartheta}{a}$$

$$= \frac{9}{4}\,Mg\sin\vartheta\cos\vartheta = \frac{9}{8}\,Mg\sin 2\,\vartheta;$$

$$Z = \frac{Ma}{2}\cos\vartheta\,\frac{3\,g\cos\vartheta}{a} - \frac{Ma}{2}\sin\vartheta\,\frac{3}{2}\,\frac{g\sin\vartheta}{a}$$

$$= \frac{Mg}{2}\left(3 - 3\sin^2\vartheta - \frac{3}{2}\sin^2\vartheta\right) = \frac{Mg}{8}\left(3 + 9\cos 2\,\vartheta\right);$$

$$\mathfrak{M}_x = {}^1/_2\, Mga\sin\vartheta;$$

$$\mathfrak{M}_y = 0; \quad \mathfrak{M}_z = 0.$$

Mit diesen Kräften müssen die Schwerkraft Mg und die Widerstände der Drehachse im Gleichgewichte sein. Letztere brauchen in diesem Falle, weil $\mathfrak{M}_y$ und $\mathfrak{M}_z = 0$ sind, nur in dem Punkte A der Achse anzugreifen; man zerlege sie in V und H. Dann muss

$$H = Y = \frac{9}{8}\,Mg\sin 2\,\vartheta \quad \text{sein}$$

$$\text{ebenso} \quad Mg - V = -\,Z = -\,{}^1/_8\, Mg\,(3 + 9\cos 2\,\vartheta),$$

$$\text{d. h.} \quad V = {}^1/_8\, Mg\,(11 + 9\cos 2\,\vartheta).$$

Der wagerechte Achsenwiderstand H ist für $\vartheta = 90^\circ$, d. h. in der Anfangslage gleich Null, ebenso in der tiefsten Lage für $\vartheta = 0$; am grössten wird er für $\vartheta = 45^\circ$, nämlich $H_{max} = {}^9/_8\, Mg$.

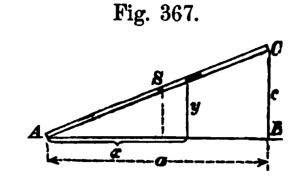
Der lothrechte Widerstand ist

$$\text{für } \vartheta = 90^0: \quad V = {}^1/_4\, Mg,$$
$$\text{für } \vartheta = 45^0: \quad V = {}^{11}/_8\, Mg,$$
$$\text{für } \vartheta = 0: \quad V_{max} = {}^5/_2\, Mg.$$

Diese Grösstwerthe von H und V sind im Verhältnisse zum Gewicht Mg des Stabes erheblich. Die Kraft H wirkt abwechselnd bald nach links, bald nach rechts, je nach der Lage des schwingenden Körpers. — Von besonderer Wichtigkeit sind diese Kräfte, wenn der schwingende Körper eine schwere Glocke ist. Die Achswiderstände H und V müssen dann von dem sog. Glockenstuhle ausgeübt werden. Der fortwährende Wechsel des Sinnes der Kraft H ist für den Thurm besonders gefährlich. Der Rechnungsgang ist im Wesentlichen derselbe wie in dem vorliegenden Falle. — Wurde die Stange in der Anfangslage ($\vartheta = 90^0$) am linksseitigen Ende etwa unterstützt, so war im Ruhezustande $V = {}^1/_2\, Mg$; durch plötzliches Loslassen des Endes verändert sich V auf ${}^1/_4\, Mg$. — Weitere Beispiele sollen sich auf gleichförmige Drehung beziehen.

Beispiel 2: Eine materielle Gerade AC (Fig. 367) drehe sich gleichförmig um eine Achse AB; der Punkt A sei unmittelbar, der Punkt C mittels einer gewichtlosen Stange c mit der Achse verbunden. Die Projektionen der Stange seien a und c. Da der Körper ein ebenes Gebilde, so lege man ACB in die xy-Ebene, dann ist $y_0 = {}^1/_2\, c$; $z_0 = 0$; ferner wird $\Sigma mxz = C_y = 0$, weil sämmtliche z-Werthe Null sind. Die Zusammensetzung der sämmtlichen Centrifugalkräfte beschränkt sich daher nach Fig. 365 auf eine Einzelkraft $Y = My_0\,\omega^2 = {}^1/_2\, Mc\omega^2$, im Abstande $u = \dfrac{C_z}{My_0}$ rechts von A liegend.

Fig. 367.



Ein Massentheilchen von der Länge ds hat die Masse $m = \dfrac{\gamma}{g} F ds$, wenn F der Querschnitt des Stabes, γ die Dichte. Man kann aber bei der Berechnung von u die selbstverständlichen Faktoren $F\gamma : g$ fortlassen, wenn man $m = ds$ und ebenso $M = s =$ der Länge der Stange setzt. Das Theilchen liefert zu C_z den Beitrag $ds\,x\,y$, was wegen $y = xc : a$ und $ds = dx \cdot s : a$ geschrieben werden kann:

$$m\,x\,y = \frac{s\,c}{a^2}\, x^2\, d\,x.$$

$$\text{Daraus folgt } C_z = \Sigma mxy = \frac{sc}{a^2}\int_0^a x^2 d\,x = \frac{1}{3}\, s\,c\,a.$$

Weil nun nach Obigem $My_0 = {}^1/_2\, c\,s$, so wird $u = {}^2/_3\, a$.

Derartig einfache Fälle kann man auch leicht ohne Anwendung der allgemeinen Formeln unmittelbar behandeln. Dem Theilchen ds entspricht die Centrifugalkraft $ds\, y\, \omega^2$. Die Mittelkraft R der Centrifugalkräfte ist die Summe der gleichgerichteten Kräfte $[ds\, y\, \omega^2]$, mithin

$$R = \omega^2 \int ds\, y = \omega^2\, s\, y_0 = \omega^2\, s\, {}^1/_2\, c \cdot = {}^1/_2\, M\,\omega^2\, c.$$

Nach dem Satze der Momente wird dann in Bezug auf A:

$$R u = \omega^2 \int ds\, x\, y = \omega^2 s \frac{c}{a^2} \int_0^a x^2\, dx,$$

$$\text{d. h.}\quad {}^1\!/_2\, s\, c\, \omega^2 u = {}^1\!/_3\, \omega^2 s\, c\, a, \quad \text{wonach} \quad u = {}^2\!/_3\, a.$$

Dass die Kraft ${}^1\!/_2\, M \omega^2 c$ durch den Schwerpunkt des Dreiecks ABC (Fig. 368) geht, folgt auch daraus, dass man die Theilkraft $ds\, y\, \omega^2$ schreiben kann

$$= \omega^2 \frac{s}{a}\, y\, dx,$$

d. h. proportional dem Flächenstreifen $y\, dx$ des Dreiecks.

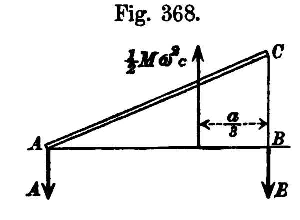


Fig. 368.

Wirken nun auf die Stange keine bewegenden Kräfte $[K]$, so müssen die etwa in A und B angreifenden Achsenwiderstände mit R im Gleichgewichte sein. Daher wird

$$A = {}^1\!/_3\, R = {}^1\!/_6\, M \omega^2 c; \quad B = {}^2\!/_3\, R = {}^1\!/_3\, M \omega^2 c.$$

Steht die Drehachse AB lothrecht und wirkt die Schwere auf die sich drehende Stange (Fig. 369), so müssen die Schwere Mg und die Widerstände A und B zusammen mit $R = {}^1\!/_2\, M \omega^2 c$ im Gleichgewichte sein. $X = 0$ erfordert, dass etwa in A ein lothrecht aufwärts gerichteter Widerstand $A_x = Mg$ wirke. Es ist ferner in Bezug auf B:

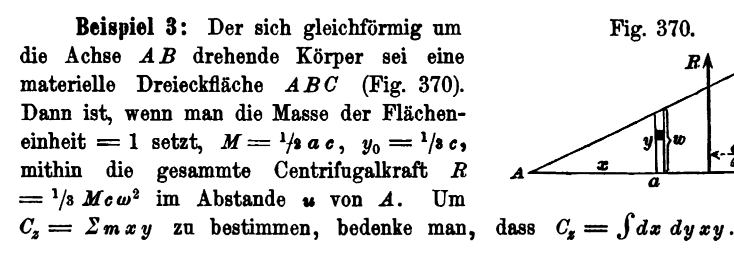
$$0 = -\frac{1}{2} M \omega^2 c \frac{a}{3} + A_y\, a - Mg \frac{c}{2},$$

$$\text{d. h.}\quad A_y = Mg \frac{c}{2a} + \frac{Mc\omega^2}{6} = \frac{Mgc}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{\omega^2}{3g}\right)$$

$$\text{und ebenso}\quad B_y = \frac{Mgc}{2}\left(-\frac{1}{a} + \frac{2}{3}\frac{\omega^2}{g}\right).$$

Fig. 369.

Es wird der Widerstand $B_y = 0$ für $\omega^2 = \dfrac{3}{2}\dfrac{g}{a}$; unter dieser Bedingung bewegt sich die Stange als ein physisches Kegelpendel; d. h. nicht durch einen Stab BC, sondern nur in Folge der Drehung wird der Winkel α unverändert erhalten. Für das mathematische Kegelpendel (S. 69) war $\omega^2 = \dfrac{g \operatorname{tg} \alpha}{c} = \dfrac{g c}{a c} = \dfrac{g}{a}$.



Beispiel 3: Der sich gleichförmig um die Achse AB drehende Körper sei eine materielle Dreieckfläche ABC (Fig. 370). Dann ist, wenn man die Masse der Flächeneinheit $= 1$ setzt, $M = {}^1\!/_2\, a\, c$, $y_0 = {}^1\!/_3\, c$, mithin die gesammte Centrifugalkraft $R = {}^1\!/_3\, M c \omega^2$ im Abstande u von A. Um $C_z = \Sigma m\, x\, y$ zu bestimmen, bedenke man, dass $C_z = \int dx\, dy\, x\, y$. Alle

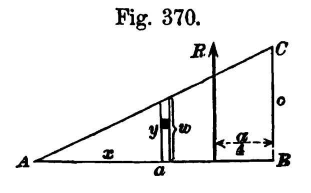


Fig. 370.

Theilchen eines lothrechten Flächenstreifens haben übereinstimmendes x und dx, liefern daher zu C_z den Beitrag $x\,dx \int_0^w y\,dy, = x\,dx\,{}^1/_2\,w^2$, wenn w die Höhe des Streifens; darin ist $w = c\,x : a$, also wird

Fig. 371.

$$C_z = \frac{1}{2}\,\frac{c^2}{a^2}\int_0^a x^3\,dx = \frac{1}{8}\,c^2 a^2 = \frac{1}{4}\,M a c.$$

Mithin nach Fig. 365 $u = \frac{C_z}{M y_0} = \frac{{}^1/_4\,M a c}{{}^1/_3\,M c} = {}^3/_4\,a$.

Die entsprechenden Achsenwiderstände werden dann

$$A = {}^1/_4\,R = {}^1/_{12}\,M c\,\omega^2 \quad \text{und}$$
$$B = {}^3/_4\,R = {}^1/_4\,M c\,w^2.$$

Stellen wir wiederum die Drehachse lothrecht (Fig. 371) und lassen die Schwere wirken, so sind in A und B die wagerechten Widerstände A_y und B_y nöthig, für welche gilt:

$${}^1/_4\,a R = A_y\,a - M g\,{}^1/_3\,c,$$

mithin $A_y = {}^1/_4\,R + {}^1/_3\,M g\,\frac{c}{a}$ und ebenso $B_y = {}^3/_4\,R - {}^1/_3\,M g\,\frac{c}{a}$.

Wiederum wird die Befestigung bei B unnöthig, wenn

$${}^3/_4\,R = {}^1/_4\,M c\,\omega^2 = {}^1/_3\,M g\,\frac{c}{a}, \quad \text{d. h. für} \quad \omega^2 = \frac{4}{3}\,\frac{g}{a}.$$

7. Gleichzeitige Verschiebung und Drehung eines Körpers.

a) Arbeitsvermögen.

Ein Körper drehe sich um eine Schwerpunktsachse, die zur x-Achse gewählt werden möge, mit der Winkelgeschwindigkeit ω; zugleich werde die Achse mit einer der xz-Ebene parallelen Geschwindigkeit u parallel verschoben, und zwar möge u mit der x-Richtung den Winkel α bilden (Fig. 372). Dann setzt sich die gesammte Geschwindigkeit v eines Punktes der Koordinaten x, y, z im Abstande ϱ von der Achse aus den Einzelgeschwindigkeiten u und $\varrho\omega$ zusammen.

Fig. 372.

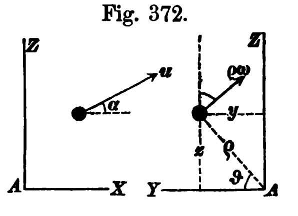


Fig. 372 stellt das Achsenkreuz in zwei Projektionen dar. Bildet ϱ mit der AY den Winkel ϑ, so ist $\varrho\cos\vartheta = y$, $\varrho\sin\vartheta = z$; somit zerlegt sich $\varrho\omega$ in $-z\omega$ und $y\omega$. Die Seitengeschwindigkeiten eines Punktes nach den Achsenrichtungen werden dann

$$v_x = u\cos\alpha; \quad v_y = -z\omega; \quad v_z = y\omega + u\sin\alpha.$$

Daher wird

$$v^2 = u^2 \cos^2 a + z^2 \omega^2 + y^2 \omega^2 + 2 y \omega u \sin a + u^2 \sin^2 a$$
$$= u^2 + \varrho^2 \omega^2 + 2 y \omega u \sin a.$$

Das Arbeitsvermögen des Körpers ergiebt sich dann zu

$$\Sigma(1/2\, m v^2) = 1/2\, M u^2 + 1/2\, \omega^2 \Sigma m \varrho^2 + 2 \omega u \sin a \Sigma m y,$$

weil u, ω und a für alle Theile des Körpers dieselben. Da aber die Ebene AXZ den Schwerpunkt enthält, so ist $\Sigma m y = 0$, mithin das Arbeitsvermögen

$$1/2\, M u^2 + 1/2\, J \omega^2,$$

wenn J das Trägheitsmoment des Körpers in Bezug auf die Drehachse. Das Arbeitsvermögen setzt sich hiernach aus zwei Theilen zusammen, deren einer das Arbeitsvermögen wegen der Verschiebung, deren anderer dasjenige wegen der Drehung bedeutet.

b) Bewegung eines freien Körpers.

Wirken an einem freien starren Körper beliebige äussere Kräfte K_1, K_2, K_3 . . ., so füge man im Schwerpunkte S des Körpers je zwei gleiche entgegengesetzte Kräfte K hinzu. Dann lassen sich im Schwerpunkte die den gegebenen gleichgesinnten Kräfte K zu einer Mittelkraft R vereinigen, während jede gegebene Kraft K mit der entgegengesetzt hinzugefügten ein Kräftepaar bildet, deren Achsenstrecken ein Gesammtmoment $\mathfrak{M}$ (S. 112) liefern. Der Schwerpunkt S bewegt sich nach dem Satze von der Bewegung des Schwerpunktes nur unter Einwirkung der Kraft R mit der Beschleunigung $p_0 = R : M$. (Wäre etwa R unveränderlich nach Grösse und Richtung, so würde der Schwerpunkt eine Parabel beschreiben, S. 59.) Das Achsenmoment $\mathfrak{M}$ bewirkt aber noch eine Drehung um den Schwerpunkt. Denkt man sich nun mit dem Schwerpunkt ein Achsenkreuz verbunden, welches dessen Bewegung völlig mitmacht, aber stets der Anfangslage parallel bleibt, so kann man die Drehung des Körpers auffassen als scheinbare Bewegung gegen dieses, mit der Beschleunigung p_0 sich verschiebende Achsenkreuz. Diese Bewegung kann dann betrachtet werden wie eine Drehung um den festliegenden Schwerpunkt, wenn man an allen Punkten des Körpers die entsprechenden Ergänzungskräfte $[-m p_0]$ anbringt. Weil diese sich gleichmässig über die ganze Masse vertheilen, so liefern sie eine Mittelkraft $-M p_0$, die durch den

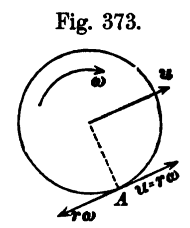
Schwerpunkt geht, daher auf die Drehung um ihn keinen Einfluss haben kann. Die Drehung geschieht also gerade so, als ruhte der Schwerpunkt.

Ist nun die durch den Schwerpunkt gelegte Achsenstrecke des Gesammt-Kräftepaars $\mathfrak{M}$ eine freie Achse und hat der Körper anfänglich keine Drehung um eine andere Achse, so wird die Drehachse ihre Richtung im Raume und im Körper nicht ändern, und der Körper wird sich um diese Achse des Gesammt-Kräftepaars $\mathfrak{M}$ gerade so drehen, als wäre sie eine festgehaltene Achse. Denn hielte man sie thatsächlich fest, so würden die Widerstände des Festhaltens wegen dieser Eigenschaft der freien Achse (S. 289) zu Null werden. Die Drehung um diese Achse erfolgt dann mit der Winkelbeschleunigung $\varepsilon = \mathfrak{M} : J$. — Dies trifft zu für eine gleichartige Kugel unter Einwirkung beliebiger aber gleichbleibender Kräfte, wenn sie zu Anfang keine Drehbewegung um eine andere Achse als die Achse des Gesammtmomentes $\mathfrak{M}$ hatte. Der Schwerpunkt beschreibt eine Parabel; die Achse $\mathfrak{M}$ verschiebt sich mit dem Schwerpunkte und bildet, weil jeder Durchmesser eine freie Achse, fortwährend die Drehachse für den Körper. — Ist aber die Achse $\mathfrak{M}$ durch den Schwerpunkt keine freie Achse, oder ist zu Anfang schon eine Drehung um eine andere Achse vorhanden, so ändert die Achse, um welche die Drehung geschieht, fortwährend ihre Richtung im Körper und im Raume; es entsteht neben der Bewegung des Schwerpunktes, die hierdurch nicht berührt wird, im Allgemeinen eine unregelmässig wirbelnde Bewegung um den Schwerpunkt, die so verwickelt ist, dass sie an dieser Stelle nicht weiter behandelt werden kann; man kann solche Bewegung beobachten, wenn man einen Stab so fortwirft, dass er eine Drehung um eine schief zu ihm liegende Achse mit auf den Weg bekommt. Wird ein Stab (Speer oder Ger) in der Mitte erfasst und in wagerechter Lage so fortgeworfen, dass er keine Drehung auf den Weg bekommt, so beschreibt sein Schwerpunkt — abgesehen von der Wirkung des Luftwiderstandes — eine Wurfparabel; die Stange erfährt, weil $\mathfrak{M} = 0$, keine Drehung, sondern bleibt immer ihrer Anfangslage parallel, stellt sich aber nicht etwa tangential zur Wurflinie. Anders ist es mit einem gespitzten und gefiederten Pfeile; dieser wird durch den Luftwiderstand stets so gedreht, dass seine Längenrichtung ziemlich tangential zur Wurflinie sich stellt.

c) Rollbewegung auf schiefer Ebene. Fuhrwerke.

Bewegung ohne Berücksichtigung des Rollwiderstandes. Hat ein Umdrehungskörper eine Winkelgeschwindigkeit ω rechtsherum um seine geometrische Achse und wird er gleichzeitig rechtwinklig zur Achse mit der Geschwindigkeit $u = r\omega$ nach rechts verschoben, so setzen sich die Geschwindigkeiten der verschiedenen Punkte eines Kreises vom Halbmesser r aus den Einzelgeschwindigkeiten $r\omega$ rechtwinklig zum Drehungshalbmesser und $u = r\omega$ zusammen. An dem Punkte A (Fig. 373) ist dann die Gesammtgeschwindigkeit $v = 0$. Bringt man den Körper an dieser Stelle mit einer Ebene in Berührung, welche mit u und der geometrischen Achse des Körpers parallel ist, so wird der Umdrehungskörper sich gegen diese Ebene in der Art bewegen, dass die Berührungsstelle fortwährend wechselt, dass an der Berührungsstelle aber stets die relative Gleitgeschwindigkeit Null ist. Eine solche Bewegung nennt man eine **Rollbewegung.** Andere, ebenfalls aus Drehung und Verschiebung zusammengesetzte Bewegungen, bei denen aber die Bedingung $r\omega = u$ nicht erfüllt ist, erscheinen äusserlich ebenfalls wie Rollbewegungen, sind es aber nicht, sondern sind, weil an der Berührungsstelle die relative Gleitgeschwindigkeit nicht gleich Null, Gleitbewegungen sich drehender Körper auf einer Ebene. Für die Kräfte und damit auch für die Gesetze der Bewegung ist es von massgebender Bedeutung, ob die Gleitgeschwindigkeit an der Berührungsstelle Null ist, oder nicht. Im ersteren Falle kommt nämlich die Reibung im Allgemeinen mit einem Betrage $T \leq fN$ zur Wirkung, während, wenn u nur im Geringsten von $r\omega$ abweicht, der volle Betrag der Reibung wirksam wird.

Fig. 373.



An dieser Stelle behandeln wir die reine Rollbewegung und werden die Gleitbewegung S. 304 besprechen.

Das Arbeitsvermögen der Rollbewegung ist nach S. 296 $1/2\, Mu^2 + 1/2\, \omega^2 J$, oder, wenn μ die auf den Halbmesser des Rollkreises r bezogene Masse (wegen $r\omega = u$):

$$1)\qquad 1/2\,(M + \mu)\,u^2.$$

Wird ein Umdrehungskörper (Cylinder, Reif oder Kugel) mit der Geschwindigkeit Null auf eine schiefe Ebene gesetzt und lediglich

der Einwirkung der Schwere Mg und des Normalwiderstandes N der Ebene überlassen, so würde er unter Annahme völliger Glätte nicht in Drehung gerathen können, weil Mg und N beide durch den Schwerpunkt gehen; es würde der Körper also eine beschleunigte, rein fortschreitende Gleitbewegung ausführen. In Wirklichkeit setzt sich ein Reibungswiderstand T dem Gleiten entgegen, und wenn dieser in der erforderlichen Grösse zur Wirkung gelangen kann, so wird er das Gleiten verhindern und eine Rollbewegung erzeugen. Unter welchen Bedingungen dies geschieht, bleibt noch zu untersuchen. Daher setzen wir zunächst voraus, dass eine vollkommene Rollbewegung stattfinde, welche entweder durch Reibung erzeugt, oder durch einen um den Rollkreis geschlungenen, von A aus auf der Ebene nach oben hin gerade gestreckten und an ihr befestigten Faden, oder endlich durch eine Verzahnung von Rollkreis und Bahn erzwungen werde. Dann wird durch eines dieser Mittel die für das Rollen erforderliche Umfangskraft T geliefert.

Beginnt die Rollbewegung mit der Geschwindigkeit Null und ist die Geschwindigkeit des Schwerpunktes, nachdem dieser um h gesunken, v geworden, so ist die Zunahme an Arbeitsvermögen $\frac{1}{2}(M+\mu)v^2$. Arbeit wird nur von der Schwere im Betrage Mgh verrichtet, denn N und T greifen an der Berührungsstelle A an, deren Geschwindigkeit Null ist. Hiernach muss

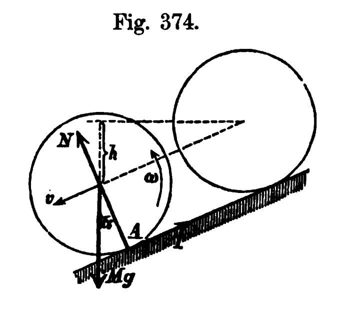


Fig. 374.

$$\frac{1}{2}(M+\mu)v^2 = Mgh \text{ sein, oder}$$

$$2) \qquad v = \sqrt{\frac{2gh}{1+\frac{\mu}{M}}}.$$

Will man die Bewegung in ihren Einzelheiten kennen lernen, so muss man die Beschleunigungen beider Einzelbewegungen berechnen. Zerlegt man Mg in $Mg \sin\alpha$ und $Mg \cos\alpha$, so muss

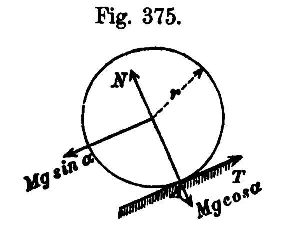


Fig. 375.

$$3) \qquad N = Mg \cos\alpha$$

sein, weil der Schwerpunkt sich geradlinig bewegt, d. h. keine Centripetalbeschleunigung erfährt. Die Beschleunigung p des Schwerpunktes erhält man nach S. 142, indem man T an den Schwerpunkt

verschoben denkt, mithin ist $Mp = Mg \sin a - T$. Weil T noch unbekannt, ist eine zweite Gleichung erforderlich. Da in jedem Augenblicke $v = r\omega$, so muss das gleiche Verhältnis auch für die Beschleunigungen gelten, d. h. $r\varepsilon = p$. Weil nun die Umfangsbeschleunigung $r\varepsilon = p$ von T herrührt, so ist nach Gl. 4, S. 277:

$$\mu p = T.$$

Führt man dies in obigen Ausdruck für Mp ein, so ergiebt sich schliesslich

$$p = \frac{Mg \sin a}{M + \mu} = \frac{g \sin a}{1 + \frac{\mu}{M}}. \tag{4}$$

d. h. die treibende Seitenkraft der Schwere $Mg \sin a$ ist nicht allein durch die Masse M, sondern durch die Summe $M + \mu$ zu theilen, da sie nicht nur die fortschreitende Masse M, sondern zugleich die Schwungmasse μ zu beschleunigen hat.

Hiermit ist auch die Umfangskraft T bestimmt zu

$$T = \mu p = \frac{\mu Mg \sin a}{M + \mu} = \frac{Mg \sin a}{1 + \frac{M}{\mu}}. \tag{5}$$

Soll nun die Rollbewegung allein durch die Reibung, ohne sonstigen Zwang gesichert sein, so muss $T \leqq fN = fMg \cos a$ sein, oder

$$\frac{\mu Mg \sin a}{M + \mu} \leqq fMg \cos a.$$

Das giebt, nach a aufgelöst:

$$\operatorname{tg} a \leqq f\left(1 + \frac{M}{\mu}\right). \tag{6}$$

Genügt die Neigung der schiefen Ebene dieser Bedingung, so ist Rollbewegung möglich. Bei zu grosser Neigung ist $fMg \cos a$ zu klein, um die der grossen Schwerpunktsbeschleunigung p entsprechende Umfangsbeschleunigung zu erzeugen; es wird dann eine Gleitbewegung entstehen.

Natürlich ist die betrachtete Rollbewegung nur möglich, wenn die Wirkungsebene der Kräfte N und T durch den Schwerpunkt geht. Es findet dies statt beim Cylinder, beim Reif, bei der Kugel; nicht beim Kegel, wohl aber bei einem Doppelkegel und allgemeiner bei jeder Achse, auf der zwei symmetrische Umdrehungskörper als

Räder befestigt sind. Da beim dünnen Reif $\mu = M$, beim Cylinder $\mu = {}^1/_2\, M$, bei der Kugel $\mu = 0{,}4\, M$, so wird

für den Reif:

$$v = 0{,}707 \sqrt{2gh} = \sqrt{gh};\ p = {}^1/_2\, g \sin\alpha;\ T = {}^1/_2\, Mg \sin\alpha;\ \mathrm{tg}\,\alpha \leqq 2f;$$

für den Cylinder:

$$v = 0{,}817 \sqrt{2gh};\ p = {}^2/_3\, g \sin\alpha;\ T = {}^1/_3\, Mg \sin\alpha;\ \mathrm{tg}\,\alpha \leqq 3f;$$

für die Kugel:

$$v = 0{,}845 \sqrt{2gh};\ p = {}^5/_7\, g \sin\alpha;\ T = {}^2/_7\, Mg \sin\alpha;\ \mathrm{tg}\,\alpha \leqq 3{,}5 f.$$

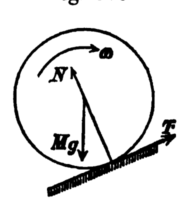
Dagegen würde für reibungsloses Gleiten gelten

$$v = \sqrt{2gh};\ p = g \sin\alpha.$$

Reif, Cylinder und Kugel, auf schiefer Ebene neben einander los gelassen, bewegen sich hiernach mit verschiedenen Geschwindigkeiten. Die Kugel eilt am meisten, u. zw. sind dabei die Durchmesser ohne Einfluss; nur auf die Form der Körper kommt es an. Hierbei wurde kein Rollwiderstand vorausgesetzt, der natürlich die Ergebnisse ändern muss.

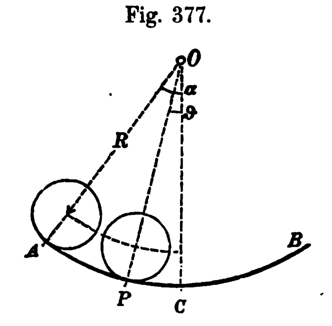
Wird der Körper in eine aufwärts gerichtete Rollbewegung versetzt und der Schwere überlassen, so könnte man auf den ersten Blick vielleicht meinen, der Sinn der Reibung T müsste sich mit der Umkehrung der Bewegung ebenfalls umkehren. Dies wäre jedoch ein Trugschluss, denn an der Berührungsstelle findet ja weder in der Richtung aufwärts, noch abwärts ein Gleiten statt, mag der Körper aufwärts oder abwärts rollen. Dass vielmehr T beim Aufwärtsrollen denselben Sinn behalten muss wie beim Abwärtsrollen, erkennt man aus Folgendem: Beim Aufwärtsrollen wird die Arbeit der Schwere negativ, somit muss die Bewegung des Schwerpunktes verzögert sein, und Gleiches folgt hieraus für die Drehbewegung. Damit aber die einzige Drehkraft T beim Aufwärtsrollen eine Verzögerung der Drehung erzeuge, muss sie (Fig. 376) aufwärts gerichtet sein. Da nun die Kräfte jetzt genau dieselben sind wie beim Abwärtsrollen, so gelten auch für p, T und $\mathrm{tg}\,\alpha$ dieselben Gleichungen wie beim Abwärtsrollen.

Fig. 376.



Geschieht die Rollbewegung nicht auf einer schiefen Ebene, sondern im unteren Theile einer Cylinderfläche vom Halbmesser $R+r$ mit wagerechten Erzeugenden (Fig. 377), so ist die Geschwindigkeit des Schwerpunktes in der Zwischenlage P nach der auch hier gültigen Gl. 2 (S. 299)

Fig. 377.



$$v=\sqrt{\frac{2gh}{1+\frac{\mu}{M}}}=\sqrt{\frac{2gR(\cos\vartheta-\cos\alpha)}{1+\frac{\mu}{M}}},$$

wenn die Bewegung bei A mit der Geschwindigkeit Null begann. Bei einem mathematischen Pendel von der Fadenlänge R würde

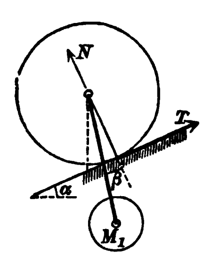
$$v_1=\sqrt{2gR(\cos\vartheta-\cos\alpha)} \text{ sein.}$$

Die Vertauschung des einfachen Pendels mit einem hin und her rollenden Körper ist also (wegen der Verkleinerung der Beschleunigung des Schwerpunktes, S. 300) gleichbedeutend mit einer Ersetzung der Fallbeschleunigung g durch den kleineren Werth $g:\left(1+\frac{\mu}{M}\right)$; mithin wird die Dauer einer kleinen einfachen Schwingung sein

$$t=\pi\sqrt{\frac{R}{g}\left(1+\frac{\mu}{M}\right)}. \tag{7}$$

Bewegung der Fuhrwerke mit Berücksichtigung des Rollwiderstandes. Tragen die auf schiefer Ebene rollenden Räder von der Gesammtmasse M ein Fuhrwerk von der Masse M_1, welches nur an der Verschiebung mit der Beschleunigung p Theil nimmt, so denkt man sich zur Berechnung der letzteren die Masse M_1 zunächst an der Achse des rollenden Körpers reibungslos aufgehängt. Die Gelenkstange zur Aufhängung nimmt dann im relativen Ruhezustande gegen die Achse des rollenden Körpers eine Richtung an, welche von der Rechtwinkligen zur schiefen Ebene um einen Winkel β abweicht (Fig. 378). Nennt man die Spannkraft der Stange, die zugleich den Druck auf die Achse bedeutet, D, so müssen D und β so bestimmt werden, dass M_1 nur an der Verschiebungsbeschleunigung p Theil nimmt. Ersetzt man die Stange durch die Kraft D und zerlegt die an M_1 wirkenden D und M_1g

Fig. 378.

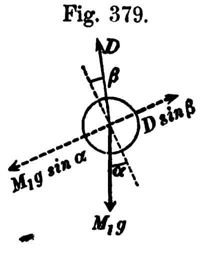


parallel zur Ebene und rechtwinklig dazu (Fig. 379), so wird $D \cos \beta = M_1 g \cos a$, ferner $M_1 p = M_1 g \sin a - D \sin \beta$ oder $D \sin \beta = M_1 g \sin a - M_1 p$. Daraus folgt

$$\operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg} a - \frac{p}{g \cos a}$$

$$8) \quad D = M_1 g \sqrt{1 - 2 \sin a \frac{p}{g} + \left(\frac{p}{g}\right)^2}.$$

Fig. 379.



An dem rollenden Körper wirken nun die in Fig. 380 angegebenen Kräfte, wo $\mathfrak{M}$ das gesammte, aus Zapfenreibung und Rollwiderstand herrührende Moment bedeutet. Nach S. 252 ist $\mathfrak{M} = \frac{1}{2} Dfd + Ne$, wenn d der Zapfendurchmesser, e der Arm des Rollwiderstandes. Dann gilt für die Beschleunigung p des Schwerpunktes

$$Mp = Mg \sin a + D \sin \beta - T \quad \text{oder}$$

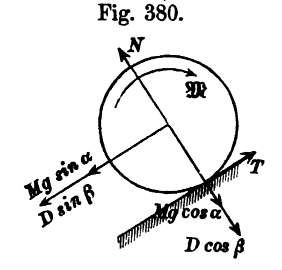
$$9) \; Mp = Mg \sin a + M_1 g \sin a - M_1 p - T;$$

und für die Umfangsbeschleunigung der Drehung nach S. 277

$$\mu p = T - \frac{\mathfrak{M}}{R}, \quad \text{oder}$$

$$T = \mu p + \frac{Dfd}{2R} + \frac{Ne}{R},$$

Fig. 380.



wenn R der Halbmesser des Rollkreises. Setzt man dies in Gl. 9 ein, so ergiebt sich

$$(M + M_1 + \mu) p = (Mg + M_1 g) \sin a - \frac{Dfd}{2R} - \frac{Ne}{R}.$$

Diese Gleichung ist nach p nicht ohne Weiteres aufzulösen, weil in D nach Gl. 8 die Grösse p ebenfalls noch vorkommt. Für alle wichtigen Fälle aber, in denen ein Fuhrwerk frei läuft, ist a und darnach auch $p : g$ nur klein im Verhältnisse zu Eins, so dass man mit genügender Annäherung $D = M_1 g$ setzen kann. Daher wird der Zapfenreibungswiderstand $M_1 gfd : (2R)$, und weil $N = (M + M_1) g \cos a$, der Rollwiderstand $(M + M_1) g \cos a \cdot e : R$, wobei für schwache Neigungen $\cos a$ mit Eins vertauscht werden darf.

Führt man aber, wie S. 254, wiederum die Gleichgewichts-Neigung a_0 ein, welche so beschaffen, dass wenn $a = a_0$ $p = 0$ ist, so wird die Summe der beiden Widerstände wieder gleich mit

$(M + M_1) g \sin a_0$, und wenn man dann noch, wie früher (S. 253), $\sin a$ mit a vertauscht, so entsteht

10) $$(M + M_1 + \mu) p = (M + M_1) g (a - a_0),$$

worin auf der linken Seite die Beschleunigung p mit der Summe der drei Massen multiplicirt erscheint, welche an der Beschleunigung p Theil nehmen (ebenso wie bei der Fallmaschine, S. 285).

Beispiel: Für einen Eisenbahnwagen auf schiefer Ebene sei $Mg = 2000$, $M_1 g = 8000$, $\mu g = 1000^{\text{kg}}$, $a = 1 : 200$, $a_0 = 1 : 400$. Dann wird, wenn man auf beiden Seiten der Gl. 10 statt der Massen die Gewichte einführt,

$$11\,000\,p = 10\,000\,g \cdot {}^1/_{400} \quad \text{oder}$$

$$p = \frac{g}{440} = 0{,}023 \, \frac{\text{m}}{\text{s.}^2}.$$

Ohne Geschwindigkeit losgelassen, wird der Wagen in 10 Sekunden eine Strecke $^1/_2 pt^2 = 1{,}1^{\text{m}}$ zurückgelegt haben, innerhalb einer Minute aber 36 mal so viel, nämlich $39{,}6^{\text{m}}$. Der Wagen läuft auf dem Gefälle 1 : 200 unter Einfluss der Widerstände ganz so, als ob er widerstandslos sich auf einem um a_0 schwächeren Gefälle 1 : 400 bewegte.

d) Gleitbewegung sich drehender Körper auf schiefer Ebene.

Beim Rollen, wo die Geschwindigkeit des Körpers gegen die Ebene an der Berührungsstelle Null ist, tritt der Reibungswiderstand nur in derjenigen Grösse auf, die erforderlich, um das Gleiten zu verhindern. Ist daher (Gl. 6, S. 300) $\operatorname{tg} a < f\left(1 + \frac{M}{\mu}\right)$, so ist $T < fN$; sind aber die anfänglichen Einzelbewegungen so beschaffen, dass an der Berührungsstelle ein Gleiten stattfindet, so tritt die Reibung in der Grösse $fMg \cos a$ auf; doch wird nach einer gewissen Zeit die Gleitbewegung in eine Rollbewegung übergehen, wenn die Bedingung für eine solche (Gl. 6, S. 300) erfüllt ist, und in diesem Augenblicke verändert sich dann die Reibung plötzlich. Der Umdrehungskörper habe zu Anfang (Stellung I in Fig. 381) eine Drehung mit der Umfangsgeschwindigkeit $r\omega_0$, eine Geschwindigkeit des Schwerpunktes c und werde mit diesen Geschwindigkeiten auf die schiefe Ebene gesetzt, so dass an der Berührungsstelle die Gesammt-

Fig. 381.

geschwindigkeit $c - r\omega_0$ entsteht. Es sei $c > r\omega_0$, dann wirkt in Fig. 381 der Reibungswiderstand $fMg \cos \alpha$ abwärts, die Seitenkraft der Schwere $Mg \sin \alpha$ ebenfalls abwärts. Der Schwerpunkt erfährt dadurch eine abwärts gerichtete Beschleunigung

$$1) \qquad p = g(f \cos \alpha + \sin \alpha).$$

Die Drehung erfährt nach S. 277 und unter Vernachlässigung des Rollwiderstandes eine Umfangsbeschleunigung

$$2) \qquad r\varepsilon = f\frac{M}{\mu} g \cos \alpha .$$

In t Sekunden entstehen die Geschwindigkeits-Änderungen

$$c - v = pt \quad \text{und} \quad r(\omega - \omega_0) = r\varepsilon t$$

mit dem Verhältnisse

$$3) \qquad \frac{c - v}{r\omega - r\omega_0} = \frac{p}{r\varepsilon}.$$

Soll nun v diejenige Geschwindigkeit des Schwerpunktes sein, bei der die Rollbewegung beginnt (Stellung II, Fig. 381), so muss $r\omega = v$ eingesetzt werden. Hiermit liefert die letzte Gleichung, nach v aufgelöst: $v = \dfrac{cr\varepsilon + pr\omega_0}{p + r\varepsilon}$; die Zeit t_1, nach welcher das Rollen beginnt, ist dann $t_1 = \dfrac{c - v}{p}$, oder nach Einsetzen von v

$$4) \qquad t_1 = \frac{c - r\omega_0}{p + r\varepsilon}.$$

Nach dieser Zeit t_1 ist die Geschwindigkeit an der Berührungsstelle Null, und die Reibung wechselt ihren Sinn. Ist nun die Bedingung Gl. 6, S. 300 erfüllt, so wird eine Rollbewegung eintreten. Andernfalls wird die Gleichheit der beiden Geschwindigkeiten v und $r\omega$ nur einen Augenblick währen, aber sogleich wieder aufhören, weil die Reibung nicht hinreicht, sie zu erhalten. — Für $r\omega_0 > c$ wechselt die Reibung ihren Sinn, es wird

$$p = g(\sin \alpha - f \cos \alpha), \quad r\varepsilon = -f\frac{M}{\mu} g \cos \alpha \quad \text{und}$$

$$t_1 = \frac{r\omega_0 - c}{r\varepsilon - p}, \quad \text{wie man leicht findet.}$$

Beispiel 1: Eine Kugel von 0,1 m Halbmesser werde nach Fig. 381 mit 8 m sekundlicher Geschwindigkeit des Schwerpunktes und 2 m Umfangsgeschwindigkeit der Drehbewegung auf eine mit $\alpha = 1/10$ ansteigende Bahn geworfen. Die

anfängliche Gleitgeschwindigkeit ist daher $6 \frac{m}{s.}$. Die Reibungsziffer betrage $f = 0{,}2$.

In diesem Falle ist cos α annähernd $= 1$ zu setzen, $\sin \alpha = 0{,}1$, $M = 2{,}5\,\mu$ (S. 273), mithin $p = g\,(0{,}2 + 0{,}1) = 0{,}3\,g$; $r\varepsilon = g \cdot 2{,}5\; 0{,}2 = 0{,}5\,g$. Die Geschwindigkeit, mit der das Rollen beginnt, ist $v = 5{,}75 \frac{m}{s.}$; die entsprechende Zeit

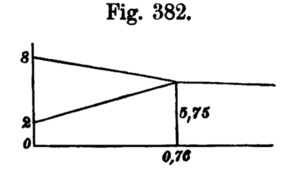
$$t_1 = \frac{8 - 2}{0{,}8\,g} = 0{,}76\ ^{s.}.$$

In diesem Augenblicke vermindert sich die Reibung nach Gl. 5, S. 300 auf

$$T = \frac{Mg \cdot 0{,}1}{3{,}5} = {}^1\!/_{35}\,Mg,$$

während sie vorher ${}^1\!/_5\,Mg$ betrug. Die Verzögerung der Rollbewegung wird nun (Gl. 4, S. 300) $p = {}^5\!/_7\,g \sin \alpha = 0{,}0714\,g = 0{,}7$. Die Geschwindigkeit wird Null nach weiterem Verlaufe von $5{,}75 : 0{,}7 = 8{,}2\ ^{s.}$, während dessen (nach Gl. 3, S. 12) $5{,}75 \cdot 4{,}1 = 23{,}6\ ^m$ zurückgelegt werden. Von dieser Stelle an rollt die Kugel mit der Beschleunigung $p = 0{,}7 \frac{m}{s.^2}$ rückwärts, soweit die Bahn reicht. Die Geschwindigkeitsgesetze sind in Figur 382 dargestellt. Die obere Linie bezieht sich auf den Schwerpunkt, die untere auf die Umfangsgeschwindigkeit der Drehung; beide treffen sich beim Beginne des Rollens.

Fig. 382.



1 a. Hat die Bahn keine nennenswerthe Neigung, ist also $\alpha = 0$, so wird die Verzögerung des Schwerpunktes $p = 0{,}2\,g$; die Umfangsbeschleunigung der Drehung $r\varepsilon = 0{,}5\,g$. Die Geschwindigkeit, mit der das Rollen beginnt, wird dann $v = 6{,}3 \frac{m}{s.}$, die entsprechende Zeit $t_1 = 0{,}874\ ^{s.}$. Mit der Geschwindigkeit v setzt die Kugel die Rollbewegung gleichmässig fort, wenn kein Rollwiderstand sie verzögert.

Berücksichtigung des Rollwiderstandes. Während des Gleitens wird nach S. 248

$$5)\qquad r\varepsilon = \left(f - \frac{e}{r}\right) \frac{M}{\mu}\, g \cos \alpha$$

zu setzen sein, während des Rollens

$$6)\qquad p = g\, \frac{\sin \alpha - {}^e\!/_r \cos \alpha}{1 + \frac{\mu}{M}}.$$

Letzteres giebt für $\alpha = 0$, $e = 0{,}5\ ^{mm}$, $r = 100\ ^{mm}$ eine Verzögerung $= \frac{g}{700} = 0{,}014 \frac{m}{s.^2}$.

1 b. Ein Umdrehungskörper, z. B. eine Kugel, kann auch auf wagerechter Bahn so fortgeworfen, fortgeschnellt, werden, dass sie nach einer gewissen Zeit zurückrollt (Billardkugel). Giebt man ihr eine grosse Drehungsgeschwindigkeit ω_0 links herum und wirft sie mit nicht zu grosser Geschwindigkeit c nach

rechts fort (Fig. 383), so erfährt sie unter Vernachlässigung des Rollwiderstandes eine Verzögerung des Schwerpunktes $p = fg$, eine Umfangsverzögerung $r\varepsilon = fgM : \mu$; also $\mu r\varepsilon = Mp$. Ist v die Geschwindigkeit, mit der das Rollen beginnt, so muss diese negativ, d. h. nach links gerichtet sein, denn während des Rollens auf wagerechter Bahn kann eine Änderung des Sinnes der Geschwindigkeit nicht mehr vorkommen. Ist t_1 die Zeit, nach der das Zurückrollen beginnt, so wird

Fig. 383.

$$c + v = pt_1, \quad r\omega_0 - v = r\varepsilon t_1,$$

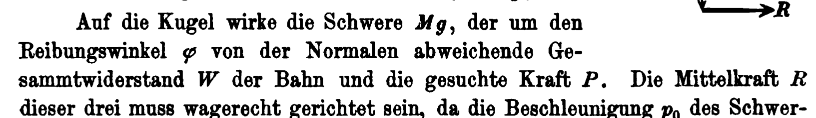
$$\text{mithin} \quad v = \frac{p r \omega_0 - c r \varepsilon}{p + r\varepsilon} \quad \text{und} \quad t_1 = \frac{c + r\omega_0}{p + r\varepsilon}.$$

Soll nun die Kugel rückläufig, also $v > 0$ sein, so muss $p r\omega_0 > c r \varepsilon$ oder $\mu r \omega_0 > Mc$, also bei einer Kugel mit $\mu = 0{,}4\, M$ $\; r\omega_0 > {}^5\!/_2\, c$, sein. Es lässt sich sogar erreichen, dass $v > c$ wird, d. h. dass die Kugel schneller zurückrollt, als sie fortgeworfen wurde. Dazu muss

$$r\omega_0 > c\left(1 + 2\frac{r\varepsilon}{p}\right), \text{ bei einer Kugel } r\omega_0 > 6\,c, \text{ sein.}$$

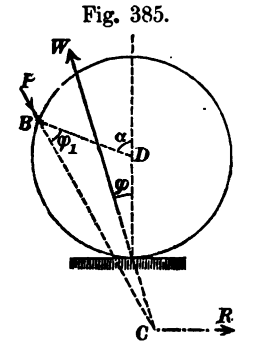
Fig. 384.

1 c. Sollen der ursprünglich ruhenden Kugel durch eine grosse, nur sehr kurze Zeit t_0 wirkende Kraft P solche Geschwindigkeiten $r\omega_0$ und c ertheilt werden, dass ein Zurückrollen eintritt, dass also $\mu r \omega_0 > Mc$ wird, so sind dazu Beschleunigungen $r\varepsilon_0$ und p_0 erforderlich, die in der Zeit t_0 die Geschwindigkeiten $r\omega_0$ und c hervorbringen; es muss also auch $\mu r \varepsilon_0 > M p_0$ sein.



Auf die Kugel wirke die Schwere Mg, der um den Reibungswinkel φ von der Normalen abweichende Gesammtwiderstand W der Bahn und die gesuchte Kraft P. Die Mittelkraft R dieser drei muss wagerecht gerichtet sein, da die Beschleunigung p_0 des Schwerpunktes wagerecht sein soll (Fig. 384), u. zw. muss die Lage von R sich unterhalb des Schwerpunktes befinden (etwa um l), dann wird $\mu r \varepsilon_0 = Rl : r$ und $M p_0 = R$, wobei $l > r$ sein muss, damit $\mu r \varepsilon_0 > M p_0$ werde. Gegenüber der grossen Kraft P möge das Gewicht der Kugel vernachlässigt werden.

Fig. 385.



Der Punkt B (Fig. 385), an welchem der Druck P auf die Kugel ausgeübt werden soll, möge durch den Mittelpunktswinkel α bestimmt sein. Übt man die Kraft P aus, indem man mit einem lederbeschlagenen Stabe bei B in der Richtung BC gegen die Kugel stösst, oder indem man mit der Hand an der Kugel (bei B sie berührend) abwärts schlägt, so wird der Stab bezw. die Hand an der Kugel gleiten und die

Richtung des Druckes P von der Normalen DB um den Reibungswinkel φ_1, der für Kugel und stossenden Körper gilt, abweichen. Soll nun der Schnittpunkt von W und P unterhalb der Kugel liegen, so muss $\alpha - \varphi_1 > \varphi$ und zugleich $\varphi_1 > {}^1\!/_2\, \alpha$ sein, woraus folgt

$$\alpha > \varphi + \varphi_1 \quad \text{und} \quad \alpha < 2\,\varphi_1.$$

Der Winkel α muss also zwischen den Grenzen $\varphi + \varphi_1$ und $2\,\varphi_1$ liegen, und es muss $\varphi_1 > \varphi$ sein, d. h. der Körper, mit dem der Druck P ausgeübt wird, muss rauher sein als die Unterlage der Kugel. Ist z. B. $f = 0{,}2$ ($\varphi = 11^0$), $f_1 = 0{,}8$ ($\varphi_1 = 39^0$), so muss α zwischen 50 und 78° liegen; es würde daher $\alpha = 60^0$ der Bedingung entsprechen.

Zerlegt man nun den Druck P in einen Normaldruck K und die Reibung $f_1 K$, W in N und fN, zerlegt ferner K und $f_1 K$ nach wagerechter und lothrechter Richtung, so wird (Fig. 386), da in lothrechtem Sinne keine Verschiebung erfolgt, $N = K(\cos\alpha + f_1 \sin\alpha)$. Dann ergiebt sich als Beschleunigung des Schwerpunktes nach rechts

Fig. 386.

$$p_0 = \frac{K\sin\alpha - f_1 K\cos\alpha - fN}{M} \quad \text{oder}$$

$$p_0 = \frac{K}{M}(\sin\alpha - f_1\cos\alpha - f\cos\alpha - f f_1 \sin\alpha)$$

und die Umfangsbeschleunigung der Drehung

$$r\,\varepsilon_0 = \frac{f_1 K - fN}{\mu} = \frac{K}{\mu}(f_1 - f\cos\alpha - f f_1 \sin\alpha).$$

Für das Zurückrollen besteht nun die Bedingung $\mu\, r\,\varepsilon_0 > p_0 M$; da nun p_0 und $r\,\varepsilon_0$ beide mit K verhältnisgleich sind, so kommt es auf die Grösse von K nicht an, sondern nur auf die Winkel α, φ und φ_1. Eine Veränderlichkeit der Grösse von K, wie sie beim Stosse besteht, bringt keine wesentliche Änderung.

Es sei $\alpha = 60^0$, $f = 0{,}2$, $f_1 = 0{,}8$ und beispielsweise $K = 20\,Mg$, dann wird

$$p_0 = 20\,g\,(0{,}866 - 0{,}8 \cdot 0{,}5 - 0{,}2 \cdot 0{,}5 - 0{,}2 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}866) = 44{,}5;$$

$$r\,\varepsilon_0 = 50\,g\,(0{,}8 - 0{,}2 \cdot 0{,}5 - 0{,}2 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}866) = 275.$$

Wie es sein musste, ist $r\,\varepsilon_0 > 6\,p_0$.

Wirkt die Kraft $K = 20\,Mg$ nebst der entsprechenden Reibung $f_1 K$ nur ${}^1\!/_{20}$ Sekunde, so braucht man die Verschiebung ihres Angriffspunktes nicht zu berücksichtigen. Es wird dann $c = 44{,}5 \cdot {}^1\!/_{20} = 2{,}23$, $r\,\omega_0 = 13{,}75$. Mit diesen Geschwindigkeiten wird sich die Kugel nach dem Aufhören der Kräfte K und $f_1 K$ bewegen und wird, da nun $p = 0{,}2\,g$ und $r\,\varepsilon = 0{,}5\,g$, zurückrollen mit der Geschwindigkeit

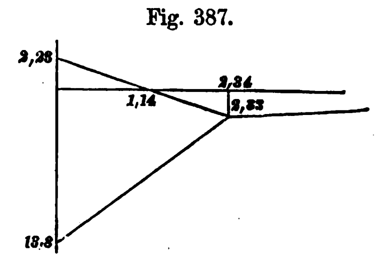
$$v = \frac{0{,}2 \cdot 13{,}75 - 2{,}23 \cdot 0{,}5}{0{,}2 + 0{,}5} = 2{,}33;$$

das Gleiten währt im Ganzen

$$t_1 = \frac{c + r\,\omega_0}{p + r\,\varepsilon} = 2{,}34 \text{ Sek.}$$

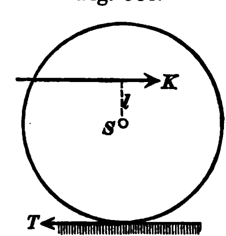
Die Umkehr der Kugel erfolgt übrigens schon während des Gleitens. Nach der Zeit $t = c : (fg) = 2{,}23 : 1{,}962 = 1{,}14$ Sek. und nachdem die Kugel sich um $s' = 2{,}23 \cdot 1{,}14 \cdot 0{,}5 = 1{,}27$ m nach rechts bewegt hat, ist die Geschwindigkeit des Schwerpunktes nach rechts Null geworden, kehrt dann während des Restes der Gleitzeit, d. h. während der Zeit $t'' = 2{,}34 - 1{,}14 = 1{,}20$ Sek. um $s'' = 2{,}33 \cdot 1{,}20 \cdot 0{,}5 = 1{,}4$ m gleitend nach links zurück. An dem um $0{,}13$ m links von der Ausgangsstelle gelegenen Punkte beginnt erst das Rollen, welches sich dann mit der Geschwindigkeit $2{,}33$ m/s. fortsetzt. Fig. 387 zeigt die Geschwindigkeitsgesetze der Bewegungen.

Fig. 387.



Beispiel 2: Wirkt auf eine auf wagerechter Ebene anfänglich ruhende Kugel eine wagerechte Kraft K, die um l oberhalb des Schwerpunktes liegt, nach rechts und soll eine Rollbewegung entstehen, so ist am Auflagerpunkte ein Widerstand T erforderlich, den wir nach links gerichtet annehmen wollen (Fig. 388). Die Beschleunigung des Schwerpunktes p (S. 142) und die Winkelbeschleunigung ε der Drehung (S. 276) werden dann

Fig. 388.



$$p = \frac{K - T}{M}; \quad \varepsilon = \frac{Kl + Tr}{\mu r^2}.$$

Für Rollbewegung muss nun $r\varepsilon = p$ sein, oder

$$K\mu r - T\mu r = KMl + TMr.$$

Hieraus bestimmt sich

$$T = K\frac{\mu r - Ml}{(M + \mu)r}.$$

Für $l = 0$ wird $T = K : \left(1 + \frac{M}{\mu}\right) = {}^2/_7\, K$. Für $l = r$ wird T negativ, nämlich $T = -K\frac{M - \mu}{M + \mu} = -{}^3/_7\, K$. Soll aber die Kraft K ohne jede Mitwirkung von T, d. h. auf völlig glatter Ebene eine Rollbewegung erzeugen, soll $T = 0$ sein, so wird $l : r = \mu : M = 0{,}4$, d. h. $l = {}^2/_5\, r$. In dieser Höhe darf eine Kugel beliebig heftig gestossen werden, ohne dass sie unten gleitet; sie wird sofort eine Rollbewegung beginnen.

e) Beschleunigte Schraubenbewegung.

Die Schraubenbewegung besteht aus einer Drehung um die Achse der Schraube und einer gleichzeitigen Verschiebung längs der Achse. Sind die Geschwindigkeiten dieser Bewegungen ω und u, so ist das Arbeitsvermögen der Schraube $^1/_2\, J\omega^2 + {}^1/_2\, Mu^2$ (S. 296). Weil aber bei der Schraube vom mittleren Halbmesser r,

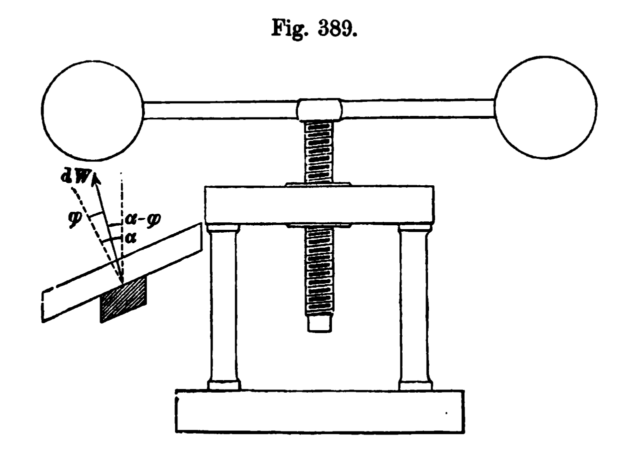
dem Steigungswinkel α der mittleren Schraubenlinie und der Ganghöhe h $2r\pi \operatorname{tg}\alpha = h$, so ist auch $r\omega \operatorname{tg}\alpha = u$, also mit $J = \mu r^2$

$$1) \qquad {}^1/_2 (J\omega^2 + Mu^2) = {}^1/_2 \left(\frac{\mu}{\operatorname{tg}^2\alpha} + M\right) u^2.$$

Hiernach würde man für eine ideelle Schraube leicht den Satz der Arbeit anwenden können. Der bei wirklichen Schrauben sehr bedeutende Einfluss der Reibung kann aber (nach A. Ritter, Techn. Mechanik) am leichtesten berücksichtigt werden, wenn man die Beschleunigungen der Einzelbewegungen berechnet.

Die Schraube sei flachgängig und oben mit Schwungkugel-Armen versehen (Fig. 389). Solche Schrauben kommen in Präge-

Fig. 389.



werken und in Hüttenwerken (zum Zerbrechen von Eisenstäben) vor. Die Schrauben werden durch Arbeiter in die Höhe gedreht und sind nicht selbsthemmend, vielmehr gewinnen sie durch ihr Gewicht (z. Th. unter Nachhülfe der Arbeiter) ein gewisses Arbeitsvermögen, welches dann zum Zerbrechen verbraucht wird. Die treibende Kraft sei allein die Schwere Mg. Ein Theilchen der Schraubenmutter leistet beim Abwärtsgleiten einen Widerstand dW, der um $\alpha - \varphi$ von der Achsenrichtung abweicht.

Der Schwerpunkt der Schraube kann sich nur geradlinig bewegen; die Beschleunigung p des Schwerpunktes folgt aus der Gleichung

$$2) \qquad Mp = Mg - \cos(\alpha - \varphi) \int dW.$$

Die wagerechten Seitenkräfte $\sin(a - \varphi)\, dW$ bilden das treibende Kräftepaar für die Drehung; es wird (S. 277, Gl. 4)

$$\mu r \varepsilon = \sin(a - \varphi) \int dW.$$

Weil aber $r\omega \operatorname{tg} a = u$, so muss auch $r\varepsilon \operatorname{tg} a = p$ sein, mithin

3) $$\mu p = \operatorname{tg} a \sin(a - \varphi) \int dW.$$

Entfernt man aus Gl. 2 und 3 die Grösse $\int dW$, so wird

4) $$p = \frac{g}{1 + \frac{\mu}{M} \frac{1}{\operatorname{tg} a \operatorname{tg}(a - \varphi)}}.$$

Ist die Schraube in **aufwärts** drehende Bewegung versetzt und wird sie dann der Wirkung der Schwere überlassen, so kehrt die Reibung ihren Sinn um, es ist $-\varphi$ mit $+\varphi$ zu vertauschen, und die Verzögerung der aufwärts gerichteten Bewegung wird

5) $$p = \frac{g}{1 + \frac{\mu}{M} \frac{1}{\operatorname{tg} a \operatorname{tg}(a + \varphi)}}.$$

Bei einer Spindel mit Schwungkugeln wird nun das Trägheitsmoment wesentlich von diesen geliefert, und es ist, wenn die Schwungkugeln zusammen die Masse M_1 haben und im Abstande R von der Mitte sich befinden, annähernd $J = M_1 R^2$; dann wird $\mu r^2 = M_1 R^2$ und, weil $R : r$ meist gross, auch μ sehr gross gegen M. Ausserdem sind, wenn auch $a > \varphi$ ist, $\operatorname{tg} a$, $\operatorname{tg}(a - \varphi)$ und $\operatorname{tg}(a + \varphi)$ immer ziemlich kleine Brüche, so dass $\frac{\mu}{M} \frac{1}{\operatorname{tg} a \operatorname{tg}(a \mp \varphi)}$ gegen die Einheit so gross wird, dass diese dagegen verschwindet. Daher kann man mit grosser Annäherung statt der Gl. 4 und 5 die einfachere Doppelformel

6) $$p = g \frac{M}{\mu} \operatorname{tg} a \operatorname{tg}(a \mp \varphi) \quad \text{schreiben.}$$

Beginnt die Bewegung mit der Geschwindigkeit Null, so ist, nachdem die Schraube um h gesunken,

7) $$v^2 = 2ph.$$

Das Arbeitsvermögen wird dann $\frac{1}{2}\left(\frac{\mu}{\operatorname{tg}^2 a} + M\right) 2ph$.

Beispiel: Das Gesammtgewicht der Schraube betrage 300 kg, wovon auf die Schwungkugeln 200 kg kommen mögen. Ausserdem sei $\operatorname{tg} \varphi = f = 0{,}1$; $\operatorname{tg} a = 0{,}2$;

$R = 20\,r$. Dann ist $\operatorname{tg}(\alpha - \varphi) = 0{,}098$, $\operatorname{tg}(\alpha + \varphi) = 0{,}306$ Ferner ist mit genügender Genauigkeit $\mu r^2 = {}^2/_3\, M R^2$, daher $\mu = {}^2/_3 \cdot 400\, M = {}^{800}/_3\, M$, so dass dagegen M in Gl. 1 zu vernachlässigen ist. Dann kann auch das Arbeitsvermögen einfacher geschrieben werden $\frac{\mu}{\operatorname{tg}^2\alpha}\,\frac{u^2}{2} = \frac{20\,000\, M}{3}\,\frac{u^2}{2}$. Die Beschleunigung der Abwärtsbewegung wird nach Gl. 6

$$p = g\,\frac{3}{800}\,0{,}3 \cdot 0{,}098 = 0{,}000\,074\, g = 0{,}000\,72\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}.$$

Nennt man p_0 die Beschleunigung einer reibungslosen Schraube von den gleichen Verhältnissen, so ist nach Gl. 6 (für $\varphi = 0$)

$$p_0 = g\,\frac{M}{\mu}\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\alpha, \quad \text{daher} \quad p = p_0\,\frac{\operatorname{tg}(\alpha - \varphi)}{\operatorname{tg}\alpha}.$$

Da nun nach Gl. 7 v^2 mit p verhältnisgleich, so ist auch, wenn $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}_0$ das Arbeitsvermögen der wirklichen bezw. der reibungslosen Schraube, $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_0\,\frac{\operatorname{tg}(\alpha - \varphi)}{\operatorname{tg}\alpha}$. Will man daher das Arbeitsvermögen der sinkenden Schraube verwerthen, so ist $\eta = \frac{\operatorname{tg}(\alpha - \varphi)}{\operatorname{tg}\alpha}$ der Wirkungsgrad der sinkenden Schraube. Es muss zugleich $\mathfrak{A}_0 = M g h$ sein, da bei der reibungslos sinkenden Schraube nur die Schwerkraft Arbeit verrichtet. Um aber von der Höhe h sinken zu können, musste die Schraube um diese Grösse gehoben werden, und weil der Wirkungsgrad der Schraube beim Heben nach S. 259 $\eta_1 = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}(\alpha + \varphi)}$, so war zum Heben die Arbeit $\mathfrak{A}_1 = M g h\,\frac{\operatorname{tg}(\alpha + \varphi)}{\operatorname{tg}\alpha}$ erforderlich. Betrachtet man nun Auf- und Abwärtsbewegung im Zusammenhange, so ist der Gesammt-Wirkungsgrad

$$\eta_2 = \frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{A}_2} = \frac{\operatorname{tg}(\alpha - \varphi)}{\operatorname{tg}(\alpha + \varphi)} = 0{,}32.$$

Annähernd kann man auch bei der Kleinheit der Winkel α und φ $\operatorname{tg}(\alpha \mp \varphi) = \operatorname{tg}\alpha \mp f$ schreiben, dann wird

$$\eta_2 = \frac{0{,}2 - 0{,}1}{0{,}2 + 0{,}1} = \frac{1}{3} = 0{,}33.$$

Derartige Vernachlässigungen sind zulässig, weil ja φ und f doch in jedem Falle nur unsicher bekannt sind. Um die Schraube von 300 kg Gewicht um $h = 0{,}1$ m zu heben, waren $30 \cdot \frac{\operatorname{tg}(\alpha + \varphi)}{\operatorname{tg}\alpha}$ = annähernd 45 mkg Arbeit aufzuwenden. Nach dem Hinabsinken um 0,1 m beträgt das Arbeitsvermögen noch $30 \cdot \frac{\operatorname{tg}(\alpha - \varphi)}{\operatorname{tg}\alpha}$ = annähernd 15 mkg.



Alphabetisches Verzeichnis und Bedeutung der in den Formeln benutzten Buchstaben unter Hinweis auf die erklärenden Seiten des Buches.

C Centrifugalmoment. 288.
D Zapfendruck. 220.
E Effekt, sekundliche Arbeit. 221.
F Flächeninhalt. 128.
G Gewicht eines Waagebalkens. 153.
H wagerechte Seitenkraft einer Stangenverbindung. 179.
J Trägheitsmoment. 267.
K Kraft. 32.
K Triebkraft. 211. 214. 241.
K Zugkraft für ein Fuhrwerk auf wagerechter Bahn. 254.
K_1 Zugkraft für ein Fuhrwerk auf einer Steigung. 254.
K_2 Haltkraft für ein Fuhrwerk auf einem Gefälle. 254.
M Masse eines Körpers oder einer Massengruppe. 124.
N Normalwiderstand. 66.
N Normalwiderstand einer Fläche. 189.
N Anzahl der Pferdestärken. 222.
P Gewicht. 228.
PS Pferdestärke. 221.
Q Gewicht. 33. 192.
Q Last. 239.
R Mittelkraft. 38. 97. 112.
R äusserer Halbmesser eines Ringes. 132.
R grösserer Halbmesser eines Spitzzapfens. 227.
R Halbmesser eines Wagenrades. 252. 303.
S Spannkraft einer Stange. 172.
S_1 und S_2 Spannkräfte in einem Seile. 64. 232. 237.
T Reibungswiderstand. 189.
V Rauminhalt eines Körpers. 126.
W Gesammtwiderstand einer Fläche. 190.
X Kräftesumme in der x-Richtung. 64.
Y Kräftesumme in der y-Richtung. 64.
Z Kräftesumme in der z-Richtung. 64.

a Länge eines schwingenden Körpers. 292.
c Geschwindigkeit, besonders gleichbleibende. 5.
c Geschwindigkeit, Anfangs-. 11.
cm Centimeter. 7.
d Zapfendurchmesser. 239.
e Arm des Seilbiegungswiderstandes. 240.
e Arm des Rollwiderstandes. 248.
e Abstand des Schwerpunktes von der Drehachse. 268.

f Reibungsziffer. 189.
g Fallbeschleunigung. 33.
h = Steighöhe. 37.
h Höhe eines Dreiecks. 128.
h Höhe eines Trapezes. 129.
h Höhe einer Pyramide. 136.
h Ganghöhe der Schraube. 257.
h. Stunde. 7.
i Trägheitshalbmesser. 268.
k Ziffer der Massenanziehung. 55.
km Kilometer. 7.
l Wurfweite. 51.
l Hebelarm. 98.
l Fadenlänge eines Pendels. 76.
l Schwingungslänge eines Pendels. 279.
m Masse eines Punktes. 32. 34.
m Meter. 7.
mkg Meterkilogramm. 44.
m. Minute. 7.
n minutl. Anzahl der Umdrehungen. 222.
p Beschleunigung. 11. 32.
p Druck für die Flächeneinheit. 222. 226.
p_n Normal- oder Centripetal-Beschleunigung. 61.
p_t Tangential-Beschleunigung. 61.
p_t Umfangsbeschleunigung. 277.
q Seitenbeschleunigung. 23.
r Halbmesser eines Kreises. 131.
r Erdhalbmesser. 57.
r innerer Halbmesser eines Ringes. 132.
r Halbmesser einer Kugel. 135.
r Zapfenhalbmesser. 221.
r Halbmesser der mittleren Schraubenlinie. 257.
r Rollenhalbmesser. 239.
r Mittelbeschleunigung. 23.
r scheinbare Beschleunigung. 85.
s Wegeslänge. 3.
s Länge einer Linie. 127.
s. Sekunde. 7.
t Zeit. 3.
t Schwingungsdauer eines Pendels. 78. 279.
u Seitengeschwindigkeit. 19.
u Geschwindigkeit eines Raumes. 80.
v Geschwindigkeit, besonders veränderliche. 6.
v Endgeschwindigkeit. 12.
v Mittelgeschwindigkeit. 21.
w Seitengeschwindigkeit. 19.
w scheinbare Geschwindigkeit. 81.
w Widerstandsziffer für Seilrollen. 241.
x Länge einer Seitenbewegung. 18.
x_0, y_0, z_0 Koordinaten des Mittelpunktes von Parallelkräften und Massen. 123.
x_0, y_0, z_0 Koordinaten des Schwerpunktes. 124.
y Länge einer Seitenbewegung. 18.
z Länge einer Seitenbewegung. 18.

Δt Zeitraum. 6.
α Neigungswinkel gegen die Abscissenachse. 5.
α halber Mittelpunktswinkel. 127.
α Neigungswinkel der schiefen Ebene. 192.
α von einem Seile umspannter Bogen. 232.
α Neigungswinkel der mittleren Schraubenlinie. 257.
α_0 Gleichgewichts-Neigung oder Widerstandsziffer für ein Fuhrwerk. 254.
α_1, α_2 Keilwinkel. 208.
β Neigungswinkel gegen die y-Achse. 23.
β halber Kantenwinkel der scharfgängigen Schraube. 260.
γ Neigungswinkel gegen die z-Achse. 23.
γ Dichte. 55.
δ halber Keilwinkel. 207.
δ halber Keilnuthen-Winkel. 196.
δ Dicke einer Platte. 128. 270.

ε Winkelbeschleunigung. 275.
η Wirkungsgrad. 214.
μ auf einen Abstand r bezogene Masse. 268.
ρ Krümmungshalbmesser. 61.
φ Reibungswinkel. 190.
ψ Reibungswinkel für die Bewegung in Keilnuthen. 197.
ω Winkelgeschwindigkeit. 87.

$\mathfrak{A}$ Arbeit. 42.
$\mathfrak{A}_i$ Arbeit der inneren Kräfte. 143.
$\mathfrak{A}_k$ Arbeit der äusseren Kräfte. 143.
$\mathfrak{J}$ geometrisches Trägheitsmoment einer Fläche, wenn dasselbe von dem eines Körpers (J) unterschieden werden muss. 274.
$\mathfrak{M}$ Drehmoment. 98. 107.
$\mathfrak{M}$ Reibungsmoment. 221.

Alphabetisches Inhaltsverzeichnis.

(Die Ziffern geben die Seitenzahlen an.)

Berichtigungen.

Auf S. 12, Zeile 8 von unten soll es statt Gl. 3 heissen: Gl. 4.
Auf S. 13, Zeile 19 von unten soll es statt durchfährt heissen: durchführt.
Auf S. 17, Zeile 8 von unten soll es statt Endpunkt heissen: Eckpunkt.
Auf S. 19, Zeile 1 von oben desgleichen.
Auf S. 20, Zeile 18 von oben soll es statt in dt heissen: um dt.
Auf S. 21, Zeile 18 von unten soll es statt v heissen: u.
Auf S. 25, Zeile 17 von unten soll es statt v heissen: r.
Auf S. 35, Zeile 1 und 2 von oben soll es statt m, heissen: m_1.
Auf S. 56 soll Gl. 3 heissen:

$$\int_e \left[(l^2 - r^2) \frac{d\rho}{\rho^2} + d\rho \right] = - \frac{l^2 - r^2}{\rho} + \rho .$$

Auf S. 98, Zeile 17 von oben soll es statt K_2 heissen: K_n.
Auf S. 106, Zeile 9 von oben soll es statt Momant heissen: Moment.
Auf S. 111, Zeile 8 von unten soll es statt einen heissen: einem.
Auf S. 165, Zeile 18 von unten ist hinter d. h. einzuschieben: solange R.
Auf S. 166, Zeile 15 von oben soll es statt Grunfläche heissen: Grundfläche.
Auf S. 180, Zeile 3 von unten soll es statt parallell heissen: parallel.
Auf S. 197, Zeile 10 von oben soll es statt denjenigen heissen: demjenigen.
Auf S. 197, Zeile 17 von oben soll es statt an heissen: in.
Auf S. 219, Zeile 7 von oben soll es statt gleichwerthig sein heissen: das Gleichgewicht halten.
Auf S. 227, Zeile 14 von unten fehlt hinter $90^\circ - \delta$ ein ; .
Auf S. 237 soll es in der Seitenüberschrift statt g) Bandbremse heissen: h) Riemenscheiben.
Auf S. 239 soll es in der Seitenüberschrift statt g) Bandbremse heissen: i) Seilrollen.



